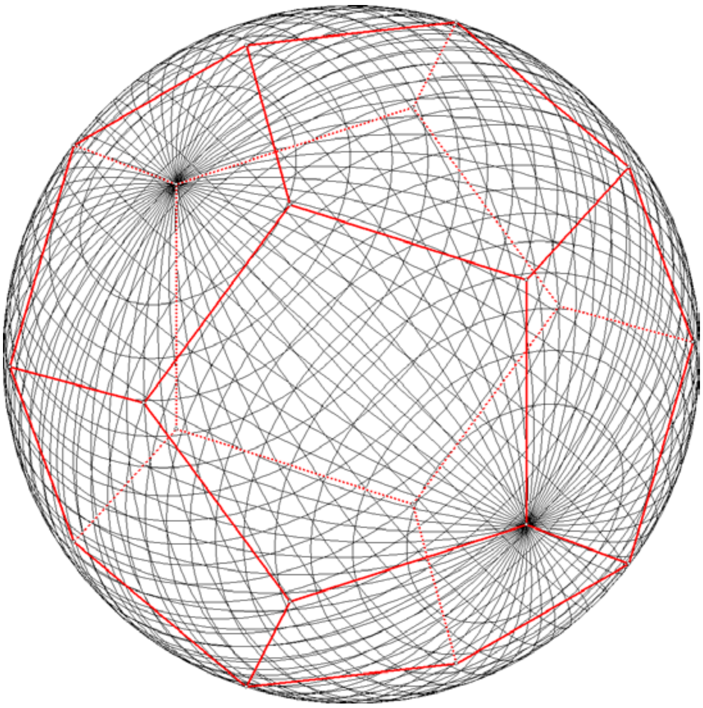
Junior College Utrecht

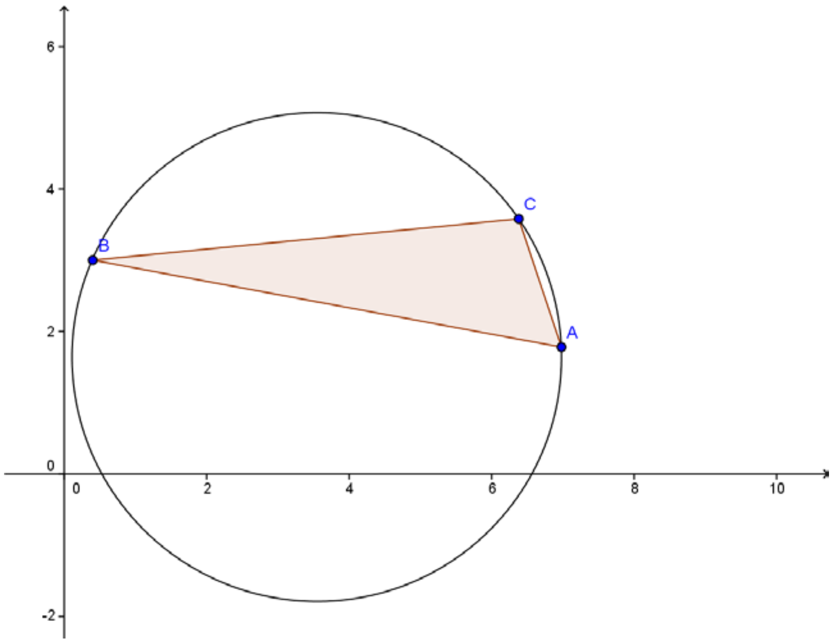
Universiteit Utrecht

KWC | Koningin Wilhelmina College

Efficientie in de ruimte - leerlingmateriaal

Versie 2
September 2012





Een project (ruimte-)meetkunde voor vwo-leerlingen

Geschreven voor het Koningin Wilhelmina College Culemborg

Door Sjoerd Andringa

Met hulp van het DocentOntwikkelTeam (DOT) Wiskunde van het JCU Utrecht

November 2011 – februari 2012

Inleiding.

Wellicht heb je je wel eens afgevraagd welke “vorm” efficienter met zijn toegemeten materiaal omspringt. Maar wat zou bedoeld worden met efficiënt, en wat is het toegemeten materiaal.

In deze module gaan we dat eens uitzoeken: eerst tweedimensionaal, daarna driediemensionaal. Het is de bedoeling dat je zelf eerst het een en ander probeert te weten te komen via de aangeboden opdrachten. We beginnen eenvoudig en bouwen op naar moeilijk.

Het gebruik van ICT (computerprogramma’s) is hierbij een handig hulpmiddel. We gebruiken de programma’s geogebra en geocadabra. Als iemand een suggestie heeft voor een ander handig programma dan houd ik mij van harte aanbevolen. Bij het verschijnen van versie 2 van deze module werd net bekend dat google sketchup hiervoor handig zou kunnen zijn.

Opgave 1. (tweedimensionaal)

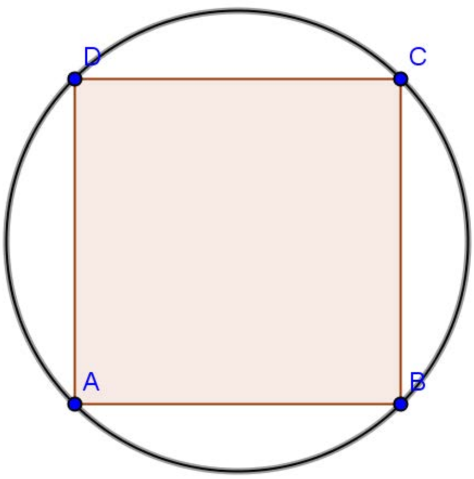
a. Neem (in gedachten) een dun ijzerdraad van één meter lengte. Vouw en buig hiermee de volgende vormen, teken het resultaat:
1. Rechthoek (maak 3 verschillende)
2. Vierkant
3. Driehoek (maak 3 verschillende)
4. Cirkel

b. Bereken zo mogelijk bij elk van de gemaakte vormen de oppervlakte.
c. Welk van de gemaakte vormen heeft de grootste efficientie? Waarom? Geef een zo algemeen mogelijke definitie binnen deze context.

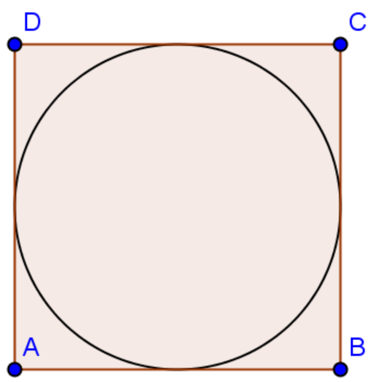
Opgave 2. (tweedimensionaal)

Bekijk de volgende vierkanten met cirkels. In beide gevallen is de zijde van het vierkant 3 cm.

Geval a



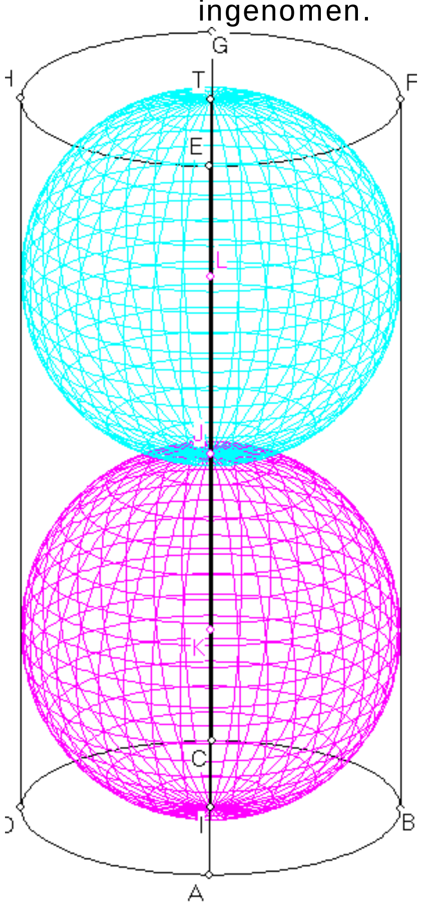
geval b

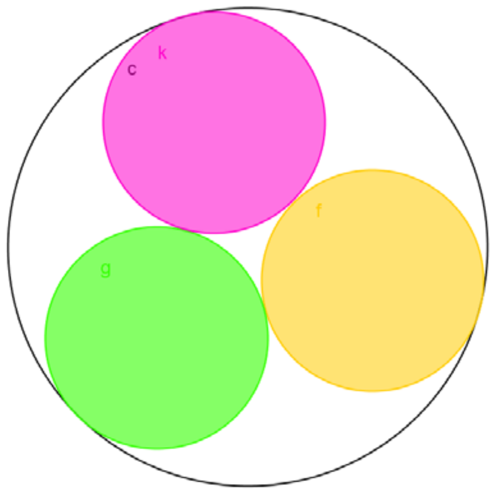


a. Hoe zou je in geval a de efficiëntie van het vierkant t.o.v. de cirkel definiëren. Bereken die efficiëntie.
b. Hoe zou je in geval b de efficiëntie van de cirkel t.o.v. het vierkant berekenen. Bereken die efficiëntie.

Opgave 3. (driedimensionaal)

1. In de figuur hieronder zie je een cilindervormige doos met een hoogte van 12 cm waarin precies 2 ballen passen.
    a. Bereken welk percentage van de verpakking door de twee ballen wordt ingenomen.





Linda haalt de ballen uit de doos en legt op de bodem drie knikkers. De knikkers passen precies op de bodem. Zie het bovenaanzicht in figuur rechts. Afgerond op twee decimalen is de straal van zo'n knikker 1,39 cm.

b. Bereken de straal van een knikker op 5 decimalen.

Deze opgave komt nog iets uitgebreider terug in hoofdstuk 2: Driedimensionaal.

Doel van deze module is het onderzoek naar efficientie in de ruimte, in die gevallen waar er sprake is van voorwerp en van verpakking.

2. Hoe zou je efficientie van ruimte definiëren?

In het onderzoek willen we zeker ook betrekken hoe ruimte efficienter benut kan worden: kun je aanwijzen aan welke eisen voldaan moet worden zodat de efficientie optimaal is? En als de figuren als geheel groter of kleiner worden: blijft dan de efficientie gelijk of kan die zo mogelijk nog verder vergroot worden.

Aan het einde van deze module lever je twee zelfbedachte combinaties, eenmaal tweedimensionaal en eenmaal driedimensionaal, waarbij je beschrijft:

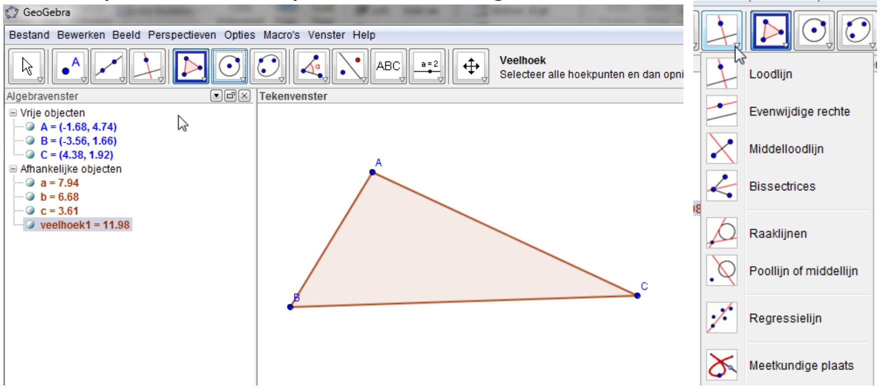
a. Hoe precies de verpakking om het voorwerp zit (of het voorwerp in de verpakking)
b. Hoe je de efficientie optimaal maakt.

Hoofdstuk 1: Tweedimensionaal

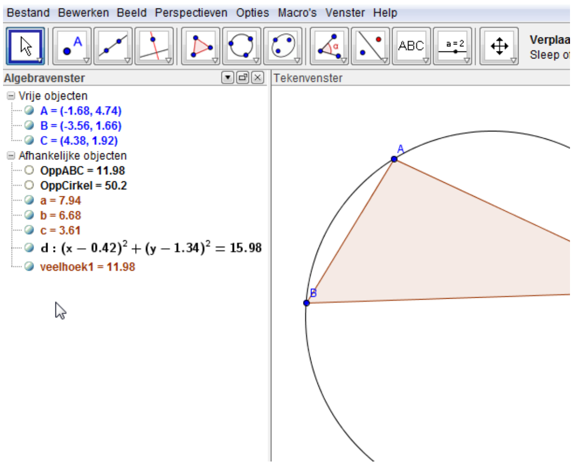
Een handig hulpmiddel bij het onderzoeken in het platte vlak is het computergeogebra. Als je dit programma helemaal niet kent is het handig om (een deel van) de handleiding door te nemen. Een handleiding kun je hier vinden.

Zorg ervoor dat je met geogebra kunt werken. Download het anders naar je computer via de site www.geogebra.org .

5. Start geogebra
a. Maak het assenstelsel onzichtbaar bij Beeld of met rechtermuisknop.
b. Begin een willekeurige driehoek met veelhoek (na het laatste punt klik je weer op het eerste punt om de figuur te sluiten.



c. Construeer de omgeschreven cirkel om deze driehoek. Denk eerst na hoe je de constructie uitvoert. Bekijk ook de opties van geogebra goed. Afhankelijk van de versie kan daarmee meer of minder. (kijk bijvoorbeeld bij de mogelijkheden bij loodlijn, zie de figuren hierboven)
d. Laat het programma de oppervlakte van de driehoek berekenen. De driehoek heet meestal veelhoek1: in het algebravenster typ je oppervlakte[veelhoek1]. Klik daarna op het pijltje linksboven, selecteer de variabele die de oppervlakte aanwijst (bijvoorbeeld e) en wijzig de naam van de variabele in OppABC.
e. Laat het programma op dezelfde manier de oppervlakte van de cirkel berekenen, of gebruik de formule $Opp = \pi \cdot r^2$

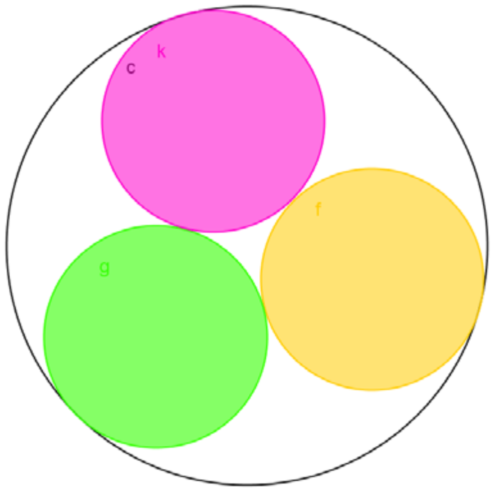


6.

a. Als je de constructie uitvoert op papier: welke snijpunt van drie bijzondere lijnen leveren dan het middelpunt van de omgeschreven cirkel?
b. Hoe zou je het begrip efficientie van de ruimte hier definieren?
c. Onderzoek door de punten A, B en/of C te verslepen hoe je de ruimte meer en minder efficient kunt maken
d. Onderzoek welke driehoek je krijgt bij maximale efficientie.
e. Kun je de efficientie nog verder vergroten door je driehoek als geheel groter of kleiner te maken. Waarom (niet)?

7. (uitdaging?) Zorg voor een driehoek met een basis AB van 6 cm en een maximale efficientie. Bereken (dus analytisch) de efficientie van de ruimte in dit geval.
8. (uitdaging) Construeer een nieuwe driehoek en nu niet de omgeschreven, maar construeer de ingeschreven cirkel (welke lijnen leveren nu het middelpunt? En waar raakt de cirkel de driehoek?) Definieer efficientie en onderzoek bij welke driehoek maximale efficientie optreedt. Bereken ook hier analytisch de meest efficiente situatie met een basis AB van 6 cm.
9. Je bent nu klaar met het 2-dimensionale deel. Er is nog wel een eindopdracht waarbij je een 2-dimensionale situatie gaat creëren.

Hoofdstuk 2: driedimensionaal



Opgave 1.
Nog eens terug naar de situatie bij de inleiding:

In de figuur hiernaast zie je nog eens de knikkers op de bodem van een cilindervormige doos. De cilinder heeft een grondvlak met straal 3 cm en de de straal van zo'n knikker is, afgerond op twee decimalen, 1,39 cm.

a. Linda plaatst 20 van deze ballen op de bodem van een rechthoekige vorm. Zie hieronder. Bereken wat de afmetingen van de bodem moeten zijn zodat de oppervlakte zo klein mogelijk is. Let op: je kunt ze op diverse manieren in de doos rangschikken: zoek uit wat de meest efficiënte manier is.

Linda doet in totaal twaalf van deze knikkers in de cilindervormige doos.

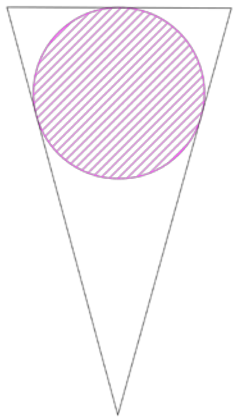
b. Uitdaging: hoe hoog moet de doos minimaal zijn willen de twaalf knikkers in de doos passen zonder uit te steken. Maak met behulp van schetsen duidelijk hoe je aan je antwoord(en) komt.

Ook bij driedimensionale situaties kun je spreken van efficiëntie.

2. Teken een kubus (met lengte zelf te kiezen).
   a. Je kunt dit met de hand doen, je mag ook werken met het programma geocadabra. Een handleiding om met geocadabra te werken vind je hier.
   b. Er is een bol die door alle acht hoekpunten gaat. Waar bevindt zich het middelpunt en bereken de straal.
   c. Definieer efficientie bij deze twee figuren in relatie tot inhouden. Hoe groot is de efficiëntie?
3. Teken een balk met lengte, breedte en hoogte a, a en 2a. Plaats ook hierom een bol die door de acht hoekpunten gaat en bereken de efficiëntie.
4. Teken een tetraëder (met lengte van de ribben 6) met omgeschreven bol. Gebruik nu bij voorkeur geocadabra. Je kunt de gemakkelijke manier volgen, maar dan zul je bij punt 4 meer werk moeten verzetten.
   d. De gemakkelijke manier
      i. Begin met het tekenen van een tetraëder
      ii. Teken een bol door de 4 hoekpunten.
      iii. Bereken de inhoud van tetraëder en bol, bereken de efficientie.
   e. De manier die investeert in opgave 4
      i. Begin met het tekenen van een piramide algemeen (grondvlak = regelmatige veelhoek met 3 hoekpunten. Nu zijn punt A en punt T verplaatsbaar. Zorg ervoor dat alle ribben even lang zijn, gebruik hierbij Berekeningen, Afstanden, Toggle lengtes.

ii. bespreek hoe je het middelpunt van de cirkel kunt vinden. Verdeel wat je moet doen in kleine stapjes. Denk in termen van
iii. welke punten moet ik vinden
iv. welke lijnstukken
v. welke vlakken
vi. Waar bevindt zich het middelpunt van de bol, en bereken de straal van de bol.
vii. Bereken de inhoud van de tetraëder en van bol. Bereken de efficiëntie.

5. Teken een piramide met omgeschreven bol. Gebruik geocadabra. Hanteer dezelfde stappen als in vraag 3.
6. Een bolletje ijs met een diameter van 6 cm past precies in (en precies onder de rand van) een ijshoorntje. Wat is de kegel met de kleinste inhoud waarbij dit lukt.



Hoofdstuk 3: Eindopdrachten

1. Bedenk in het tweedimensionale geval een situatie waarbij sprake is van efficientie van de ruimte: een figuur die zo mogelijk meermalen in een andere figuur past (of andersom). Definieer en bereken de efficientie. Maak gebruik van tekeningen (met geogebra o.i.d.)
2. Bedenk in het driedimensionale geval een situatie waarbij sprake is van efficientie van de ruimte: een figuur die zo mogelijk meermalen in een ander figuur past (of andersom). Definieer en bereken de efficientie. Maak gebruik van tekeningen (met geocadabra o.i.d.)