Universiteit Utrecht

Junior College Utrecht

Rakende cirkels

Keuzeopdracht voor wiskunde

Verrijkende opdracht over construeren en redeneren in figuren
Voorkennis: meetkunde: cirkels, raaklijn, loodrecht stand; sinus: waarden voor 'bekende' hoeken als 30° en 60°.

Oriëntatie

Met passer en liniaal kun je prachtige plaatjes maken. In de brugklas toen je voor het eerst de passer bij wiskunde mocht gebruiken, mocht je waarschijnlijk een mooie bloem tekenen. Tekenen met passer en liniaal is leuk.

In deze opdracht ga ja vooral onderzoek doen naar rakende cirkels.

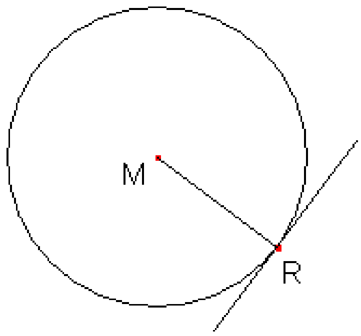
Een raaklijn in een punt R van een cirkel met midden M staat loodrecht op de straal MR (bewering 1)

Dat klinkt erg voor de hand liggend, maar kun je het ook bewijzen?

Vraag 1. Raaklijn aan een cirkel

Wat je wel vrij eenvoudig kunt bewijzen is deze bewering die er sprekend op lijkt.

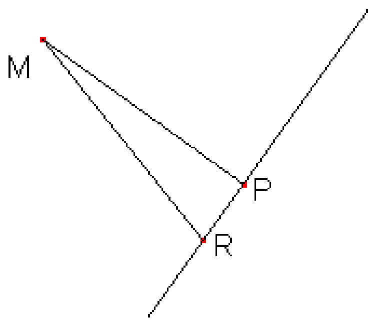
De lijn door punt R op de cirkel, loodrecht op de straal MR, raakt aan de cirkel. (bewering 2)



a. Teken maar een punt P op die lijn in de figuur. Voeg ook een teken voor "loodrecht" toe. Toon aan dat MP > MR. (Je weet vast wel een stelling waar je dat mee kunt doen)

Je bent nog niet klaar, want bewering 2 is niet hetzelfde als bewering 1. Je moet nog laten zien dat de niet-loodrechte lijnen niet aan de cirkel raken.

In de tekening hiernaast is M het middelpunt en R het raakpunt aan de cirkel. De cirkel is opzettelijk niet getekend. Veronderstel nu dat de hoek tussen de straal en de raaklijn geen 90° is, maar kleiner is dan 90°. Je kunt dan van uit M een loodlijn op de raaklijn tekenen en zo vind je punt P.



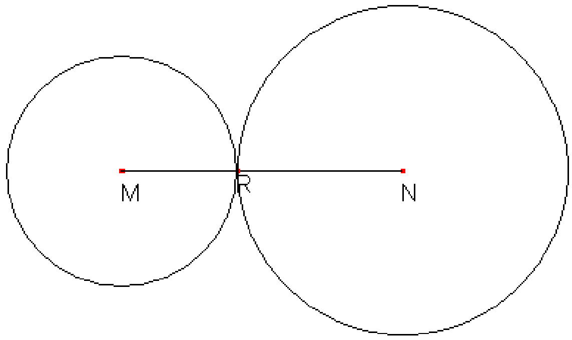
b. Waarom is MP kleiner dan MR? Welke stelling gebruik je?
c. Als R op de cirkel ligt, wat kun je dan van de ligging van P zeggen?
d. Waarom is de lijn door R en P dan geen raaklijn meer?

Vraag 2. Twee rakende cirkels

Twee cirkels raken elkaar in punt R.

Dat betekent: R ligt op allebei de cirkels én de cirkels hebben daar dezelfde raaklijn

- Bewijs dat de punten M, R en N op één lijn liggen.



Vraag 3. Raaklijn vanuit een punt aan een cirkel

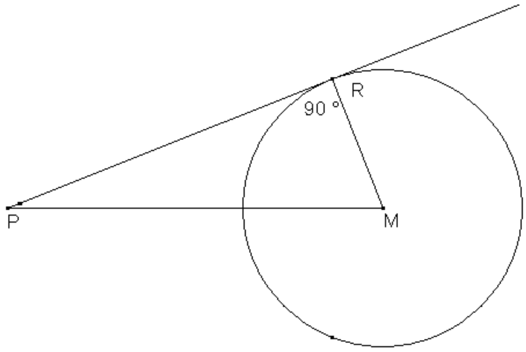
Vanuit P is een raaklijn aan de cirkel getekend.

a. Waarom is de hoek bij punt R 90°?

De vraag is nu hoe je dat punt R vindt.

Je mag niet voorzichtig schuiven met een liniaal tot het er wel op lijkt dat de liniaal door P gaat en de cirkel raakt.

Er is een methode waarmee je het punt exact bepaalt.



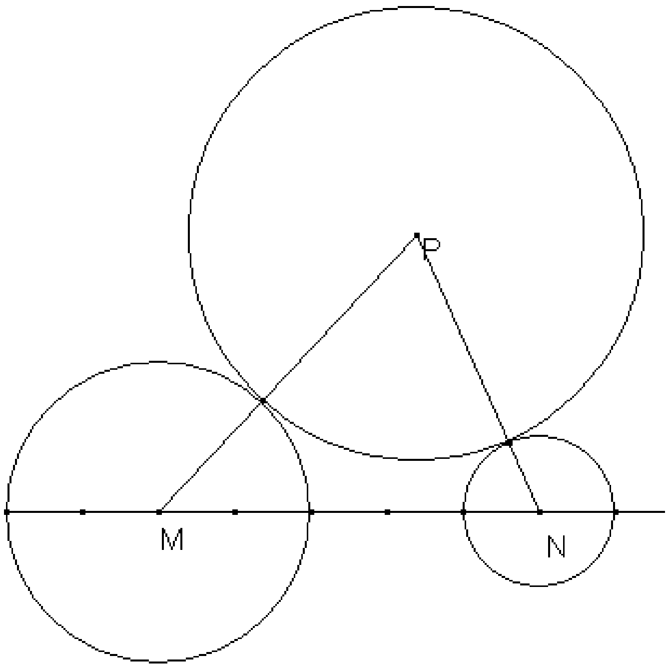
b. De driehoek PMR is de helft van een rechthoek PQMR. Teken die rechthoek en teken in die rechthoek ook de diagonalen. Kijk goed naar de ligging van het snijpunt van de diagonalen.

c. Waarschijnlijk heb je nu een methode gevonden om van uit een punt de raaklijnen aan een cirkel te construeren met behulp van de passer. Beschrijf deze constructie en controleer met een paar voorbeelden of jouw methode klopt.

Vraag 4. Drie rakende cirkels

In de figuur hiernaast zijn eerst twee cirkels met middelpunten M en N en met straal 2 cm en 1 cm getekend. Daarna is een cirkel met straal 3 cm zo geconstrueerd dat de beide andere cirkels geraakt worden.

- Teken zelf twee cirkels met straal 2 en 1 cm met MN=5 cm. Construeer daarna de cirkels met straal 3 cm die beide cirkels raken. Beschrijf je constructie.

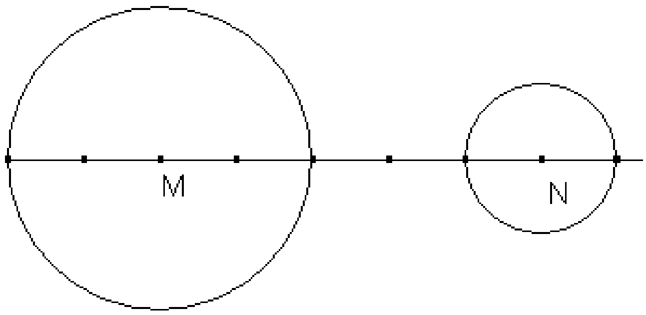


Onderzoek aan rakende cirkels

Vraag 5. Een eerste onderzoek

Teken nog eens de beginsituatie van de vorige opdracht, dus een cirkel met straal 2 en 1 cm. Neem weer MN=5 cm.

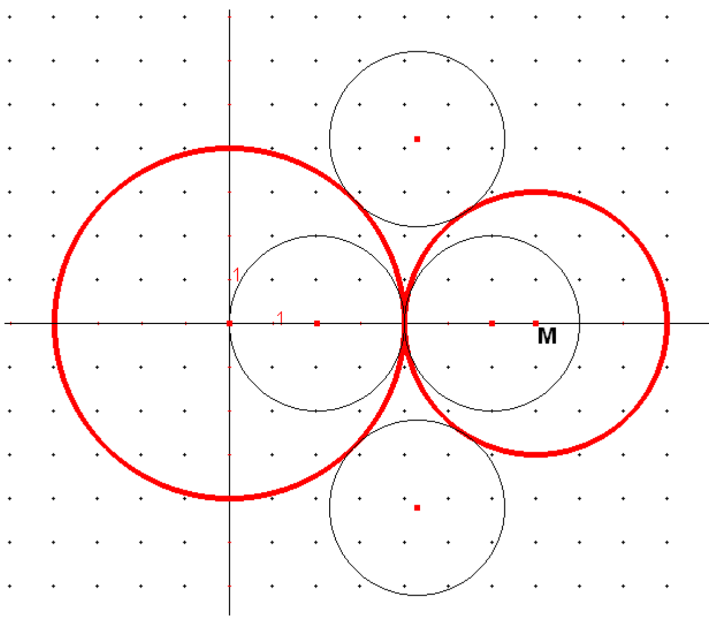
In de vorige opdracht kon je twee cirkels met straal 3 cm tekenen die aan de eerst getekende cirkels raken.



a. Hoeveel van die cirkels, die aan de eerst getekende cirkels raken, zijn er met straal 5 cm?
b. En bij straal 10 cm?
c. Zoek een straal waarbij er drie rakende cirkels of precies één zijn.
d. Maak een schema met alle mogelijkheden.

Vraag 6. Een vervolgonderzoek

In de figuur zijn twee "grote" rode cirkels getekend. De linker cirkel heeft een vast middelpunt, namelijk de oorsprong, en de straal is 4. De rechter cirkel heeft straal 3 en het middelpunt M kan over de x-as bewegen. Omdat M in deze figuur in (0,7) ligt, raken de twee rode cirkels elkaar in (0,4).



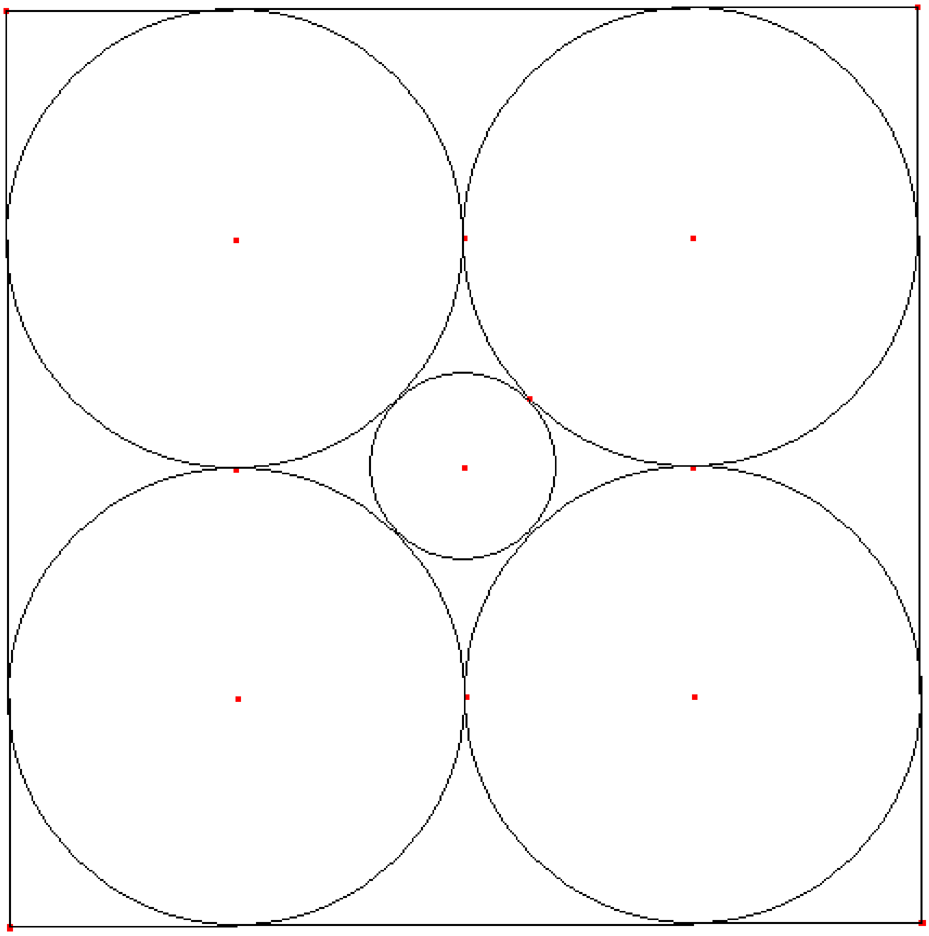
In dit geval zijn er 4 cirkels met straal 2 die beide rode cirkels raken.

- Onderzoek hoeveel cirkels er met straal 2 zijn die raken aan de rode cirkels als M over de x-as wordt verplaatst. Voor het gemak mag je je beperken tot de roosterpunten op de x-as. De antwoorden zijn 0 t/m 6 cirkels.

Vraag 7. Nog een vervolgonderzoek

Als je de raakcirkels niet straal 2 maar 1 geeft, kan je één keer 7 raakcirkels tekenen. En één keer zelfs 8! Maak van één van deze situaties een mooie tekening.

Vraag 8. **Bereken de straal van de middelste cirkel**



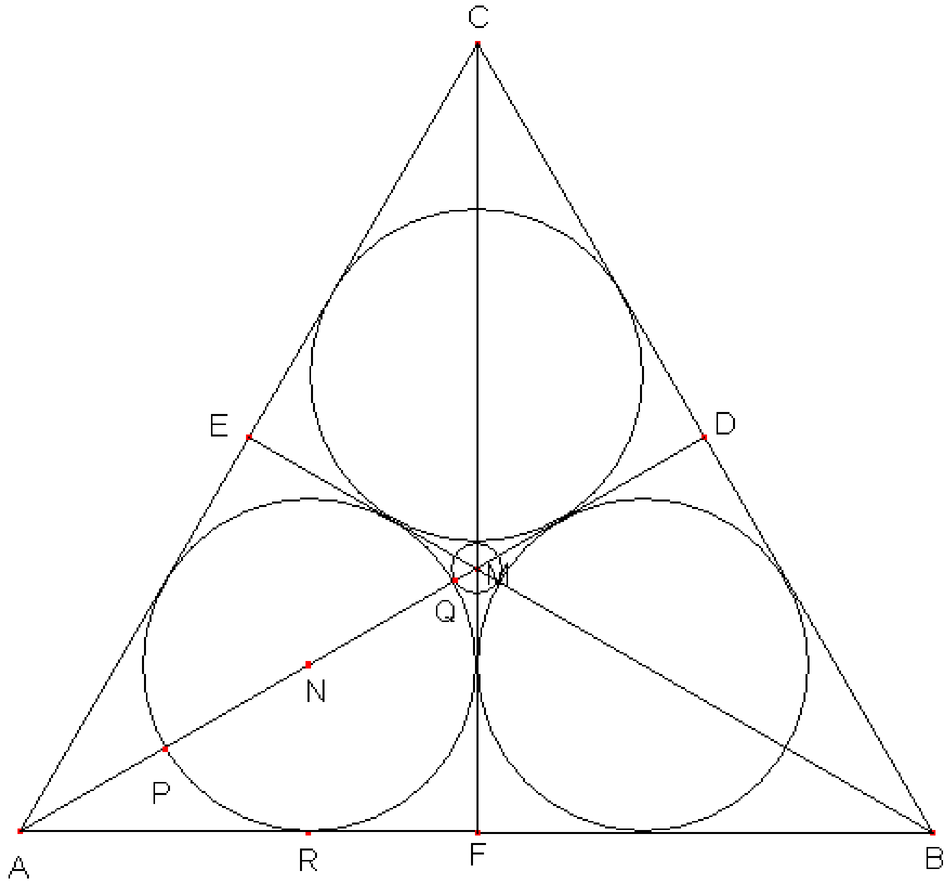
Dit is een vierkant van 12 bij 12. Dat de straal van de vier grote cirkels 3, zie je direct. Maar wat is de straal van de kleine cirkel?

a. Geef de hoekpunten de namen A, B, C en D en noem het middelpunt van het vierkant M. Trek de nodige hulplijnen en bereken daarna de exacte straal van de kleine cirkel.

Extra:

b. In de vier hoeken van het vierkant passen ook nog cirkeltjes. Er zijn ook nog vier 'gaten' bij het midden van de zijden. Daar passen ook cirkeltjes in. Bepaal ook deze stralen.

Vraag 9. Bereken de straal van de grote cirkels en van de kleine cirkel



In een gelijkzijdige driehoek met een zijde van 12 is ook de exacte straal van de getekende cirkels te berekenen. Maar dat is wel lastiger.

a. Leg uit dat AR gelijk is aan 6 – NP (NP is de straal van de grote cirkel)

b. Je kent de exacte waarden van de $\tan(30^\circ)$ en $\sin(30^\circ)$? Toon aan dat de straal van de grote cirkel gelijk is aan $\frac{6}{1+\sqrt{3}}$

c. Als je bij $\frac{6}{1+\sqrt{3}}$ zowel de teller als de noemer vermenigvuldigt met $1-\sqrt{3}$, krijg je $-3+3\sqrt{3}$. Laat dat zien.

Nu kun je zelf proberen de straal van de kleinste cirkel te berekenen. Probeer ook het exacte antwoord $9-5\sqrt{3}$ te krijgen. Als je geen idee hebt, hoe je dit moet aanpakken, maak dan eerst opdracht d.

d. Toon aan dat AP = PN en dat AM = 2MD.

e. Bereken de exacte lengte van de straal van de kleinste cirkel ($-5\sqrt{3}+9$).

Vraag 10. Japanse tempelkunst

In de Wikipedia kun je lezen:

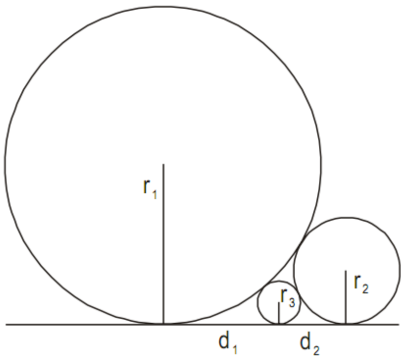
Sangaku of San Gaku (lett. wiskundige tablet) zijn Japanse puzzels in de Euclidische meetkunde gemaakt door leden van alle sociale klassen op houten tafels gedurende de Edoperiode (1603-1867).

Gedurende deze periode was Japan geheel geïsoleerd van de rest van de wereld, dus de tafels werden gemaakt met Japanse wiskunde, wasan, niet beïnvloed door westers wiskundig denken. Het fundamentele verband tussen een integraal en zijn afgeleide was bijvoorbeeld onbekend, zodat Sangaku problemen over oppervlaktes en inhouden werden opgelost door ze uit te drukken in oneindige reeksen en term voor term berekening.

De Sangaku werden in kleur geschilderd op houten tafels, die op het terrein van tempels en Shinto-kapellen werden opgehangen als offers aan de goden of als uitdagingen voor de leden van de congregatie. Veel van de tafels gingen verloren gedurende de periode van modernisering na de Edoperiode, maar men kent er nu ongeveer negenhonderd die hebben overleefd.

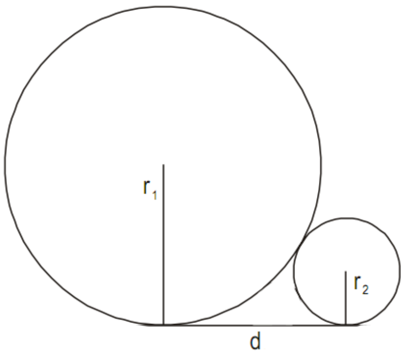
Bij Google geeft "Sangaku" bijna 200.000 hits. Blijkbaar is de Sangaku een inspirerend onderwerp.

Zo ook voor Ineke Lambers, die deze mooie digitale prent maakte (verkrijgbaar bij de Stichting Ars et Mathesis).



Er is een elegante formule die het verband laat zien tussen de drie stralen: $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$

In de figuur hiernaast is de middelste cirkel weggelaten.



a. Toon aan dat voor d geldt: $d = 2\sqrt{r_1 \cdot r_2}$

b. Pas deze formule twee keer toe op de figuur met de drie cirkels en bewijs de formule: $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$

Afronding

Je hebt nu waarschijnlijk genoeg mooie wiskunde gezien om een prachtige poster of presentatie te maken. Beperk je tot één onderwerp of aspect van rakende cirkels en bedenk vooraf wat je daarover aan de toeschouwer wilt overbrengen. Richt je poster of je presentatie geheel op dat doel.