Universiteit Utrecht

Junior College Utrecht

Periodiciteit bij breuken

Keuzeopdracht voor wiskunde

Een verdiepende opdracht over periodieke decimale getallen, priemgetallen
Voorkennis: omrekenen van een breuk in een decimale vorm

Inleiding

In deze opdracht leer je dat het omzetten van een breuk naar een kommagetal maar weinig tijd kost: je hoeft alleen een begin uit te rekenen, dat zich daarna herhaalt, zoals bij 1/11 = 0,0909…..

Je vindt in deze opdracht uit hoe lang dat begin is, en hoe de lengte van de noemer van de breuk afhangt. De bouwstenen van onze getallen (de priemgetallen) heb je nodig om de verbanden te begrijpen. Daardoor verrijk je ook je kennis van de getaltheorie.

Je bevindingen presenteer je aan je docent en je medeleerlingen. Natuurlijk geef je een verklaring met paar extra mooie voorbeelden!

Universiteit Utrecht

Junior College Utrecht

PERIODICITEIT BIJ BREUKEN

Inleiding
In 1815 werd aan het Nederlands lager, middelbaar en hoger onderwijs verplicht reken- en wiskunde ingevoerd. Gelijktijdig werd een rangenstelsel ingevoerd voor onderwijzers waarin de onderwijzer een hogere rang bekleedde wanneer hij meer van wiskunde wist. Een belangrijk onderwerp in het reken- en wiskundeonderwijs was het omrekenen van (gewone) breuken naar decimaalbreuken (en andersom).

Tegenwoordig kunnen rekenmachines en computers het rekenwerk doen. Wij kijken dan naar de onverwachte verschijnselen die dan in de decimale breuken aan het licht komen. In deze opdracht gaan dat doen we kijken vooral naar de lengte van de decimale breuk.

Inhoudelijk oriëntatie
De grafische rekenmachine maakt van $\frac{1}{8} = 1/8$ de decimale breuk 0,125, van $\frac{2}{3}$ de doorlopende decimale breuk 0,666666… en van $\frac{1}{7}$ de decimale breuk die begint met 0,1428571428…
Je weet toch nog: de decimale breuken geven aan hoeveel helen, hoeveel tienden, hoeveel honderdsten, … etc. er zijn.

Je ziet bij het omrekenen naar de decimale breuken, deze soms ***stoppen*** (zoals bij $\frac{1}{8}$) soms ***repeteren*** (zoals bij $\frac{2}{3}$ en $\frac{1}{7}$).
Bij het repeteren is er bovendien verschil in de lengte van het **repeterende** deel.
Bij $\frac{1}{7}$ = 0,142857142857142857142857… heeft het repeterende deel een lengte 6, daarom noemen we de **periode** van deze breuk 6.

Andere voorbeelden:

$\frac{1}{13}$ = 0,076923   076923   076923   076923   0769230769   23076923   0...

$\frac{1}{17}$ = 0,05882352   94117647   0588235294   11764   ...

$\frac{1}{83}$ = 0,01204819   2771084337   3493975903   6144578313   253 012...

1a Wat is de periode van $\frac{1}{13}$, $\frac{1}{17}$ en $\frac{1}{83}$?

b Weten we zeker dat $\frac{1}{83}$ inderdaad repeteert?
Schrijf op hoe je dat wel/niet zeker weet

We gaan nu onderzoeken of er **regelmaat** zit in de grootte van zo'n periode.

Bij dit onderzoek is het natuurlijk belangrijk dat we goed kunnen delen, zodat we iets kunnen zeggen over de periode. Daar zijn een aantal manieren voor:

- Staartdeling: (zie bijlage 1)
- Delen met rest (zie bijlage 2)
- Rekenmachine
- Computer met software (Mathematica, Derive) voor veel decimalen

2a Zoek uit hoe het delen gaat bij bijlage 1 en bijlage 2.

b Schrijf op beide manieren de deling op van $\frac{1}{78}$

3 Bepaal ook de periode van $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$ en $\frac{6}{7}$. Wat valt op?

4 Onderzoek ook de periode van $\frac{2}{13}, \frac{3}{13}, \frac{4}{13} \ldots\ldots \frac{12}{13}$

5 Welk vermoeden krijg je als je naar de antwoorden van **3** en **4** kijkt?

We bekijken nu de breuken van de vorm: $\frac{1}{n}$

6 Schrijf voor de getallen n = 1 tot en met n = 15 (zo mogelijk) de periode op van $\frac{1}{n}$.

Breuk	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	…
Periode	…	…	…	…	…	**6**	…	…	…

7 Repeteren al deze breuken?

Bij een aantal breuken is het snel afgelopen: $\frac{1}{4} = 0{,}25$ of $\frac{1}{4} = 0{,}250000000$.......

We spreken af dat het repeterende deel hier (dus) 0 is. De periode zeggen we is 1.

8 Kan het ook zijn dat bij periode 1 het repeterende deel **niet** 0 is ?
Zo ja geef een voorbeeld, zo nee, waarom denk je van niet?

Bewering 1: Elke breuk $\frac{1}{n}$ repeteert (soms met als repeterend deel 0)

Bewering 2: Elke periode is kleiner dan n.

9 Geef aan waarom deze beweringen waar zijn.
[HINT: gebruik de manier van delen zoals in bijlage 1 en 2 en bedenk dat als je door n deelt, hoeveel verschillende resten er dan theoretisch mogelijk zijn?]

INTERMEZZO PRIEMGETALLEN

Priemgetallen zijn getallen (groter dan één) die alleen 1 en zichzelf als (positieve) deler hebben.
Bijvoorbeeld: 7 is een priemgetal want 7 is deelbaar door 1 en 7 en verder niet.
Andere priemgetallen: 2, 3, 5, 7, …

10 Hoeveel <u>even</u> priemgetallen zijn er?

Bewering 3: elk positief geheel getal *n* kan worden geschreven als het product van priemgetallen en dit kan op exact één manier (afgezien van de volgorde van de priemgetallen). Deze bewering heet de **hoofdstelling van de rekenkunde.**

Om alles precies te bewijzen voor alle getallen vergt een aantal stellingen, die gaan we nu niet allemaal doen.
(Bekijk hiervoor bijvoorbeeld:
http://www.math.ru.nl/~keune/Getallen/Getal_08.pdf)
Een deel ervan doen we wel en die gaan we nu bekijken.

Bewering 3*: Ieder natuurlijk getal $n > 0$ heeft een priemfactorontbinding.

11 Wat is het verschil tussen de **hoofdstelling van de rekenkunde** (bewering 3)
en **bewering 3*** ?

Een bewijs van **bewering 3*** is gebaseerd op het axioma van *volledige inductie*.
[Een bewijs met volledige inductie gaat globaal zo:
1. Je bewijst de bewering voor het kleinste getal waar de bewering juist is
2. Je gaat er vanuit dat de bewering juist is voor een getal *n* en bewijst de bewering vervolgens voor het getal n+1]

12 Bekijk het bewijs hieronder:

Bewijs:
Voor $n = 1$ is de uitspraak waar, omdat 1 per definitie een priemfactorontbinding heeft (met 0 priemfactoren).

We nemen een getal *n* waarvan we aannemen dat bewering 3* waar is voor alle getallen kleiner dan *n*.
M.a.w. alle getallen kleiner dan die *n* hebben een priemfactorontbinding. [*]
Bekijk nu het getal $n+1$. Dan zijn er twee mogelijkheden:
- $n + 1$ is een priemgetal. Dan is natuurlijk bewering 3* voor n+1 waar. (De priemfactorontbinding heeft *één* priemfactor.)
- $n + 1$ is geen priemgetal. M.a.w. er is een (andere) deler dan 1 of n+1.
  Dan is $n+1= a\cdot b$ met *a* en *b* tussen 1 en n+1.
  Omdat *a* en *b* beide kleiner dan *n* zijn (en niet 0) hebben ze een priemfactorontbinding (zie [*]). En natuurlijk het product van *a* en *b* ook.
  Dus dan is bewering 3* voor n+1 ook waar.

12* Om te laten zien dat je deze manier snapt (niet nodig voor periodiciteit van breuken) bewijs je op deze manier: $1+2+3+4+\dots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$

EINDE INTERMEZZO PRIEMGETALLEN

We vervolgen ons onderzoekje maar de lengte van periodes bij decimale breuken. Je kan daarbij de bijlagen gebruiken. In de **bijlagen 3 en 4** vind je een lijst van priemgetallen en een lijst van periode van een heel aantal breuken $\frac{1}{n}$.

13 We bekijken nu de periodiciteit van de breuken $\frac{1}{p}$ als p een priemgetal is.

Kijk eerst eens naar de periodiciteit bij: 7, 17, 23 en 167. Er lijkt een regelmaat op te duiken.

a Formuleer die regelmaat.

b Kan die regelmaat waar zijn als je kijkt naar andere priemgetallen?

c Kan je je formulering eventueel bijstellen?

14 Onder opdracht **6** hebben we gezien dat bij sommige breuken de periode snel afbreekt.
Kun je een systeem ontdekken? Waarom bij 4, 5, 8, 10, 20 wel en waarom bij 3, 6, 7 en 15 niet?

HINT 1: Schrijf de getallen die je onderzoekt als product van priemfactoren.
Bijvoorbeeld: $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^1$

HINT 2: Laat zien dat er breuken zijn waar je de noemer kan schrijven als macht van 2 of 10. Bijvoorbeeld: $\frac{1}{256}$
Wat zegt dat over de decimale breuk bij $\frac{1}{256}$?

15 Onderzoek ook eens naar de periode van breuken $\frac{1}{p^2}$ (met p priem). Is er regelmaat met de periode van $\frac{1}{p}$? En bij resp. $\frac{1}{p^3}$, $\frac{1}{p^4}$ etc.

16 Zijn er nog andere breuken waar je iets van kan zeggen? (In vervolg op **15**)

17 Met behulp van bovenstaande vragen hebben we onderzoek gedaan naar de periodiciteit bij breuken.

Een aantal vragen zijn open gebleven, ook voor de wetenschap.

Probeer een overzicht te maken over welke breuken we nu iets kunnen zeggen over de lengte van periodiciteit.

Afronding
Maak een presentatie of poster waarmee je de belangrijkste onderdelen van de opdracht kunt laten zien. Wat hebben jullie gedaan en wat heb je daarvan geleerd? En hoe kun je dat aan belangstellenden tonen?

Bijlage 1: Delen

Om een gewone breuk om te zetten in een decimale breuk kun je natuurlijk een ouderwetse staartdeling maken.
Het berekenen van $\frac{1}{7}$ gaat daarmee als volgt:

```
              7/10 \
0,142857….
              __7
                30
               _28
                  20
                  14
                    60
                   _56
                      40
                      35
                       50
                        49
                         10
```

[*in het kort:* Je deelt 7 op 1:
0 x (die schrijf je op), we maken van de **één** nu **tien tienden.** Delen door 7 geeft dan 1 tiende, dus:
1 x (die **1** rechts opschrijven)
je houdt je 3 (tienden) over (we noemen die **3** de **rest** van de deling). Je deelt daarna **7** op **30** honderdsten:
4 x, (dus **4** opschrijven) dan houdt je 2 over, 7 op 20:
2x etc. etc. Dus kreeg je 0,**142……**]

Bijlage 2:

We kijken voor de periodiciteit vooral naar de ***resten***. Hoe doen we dat handig?
Bekijk het volgende voorbeeld: $\frac{17}{13}$

17 = 1.13 + 4 (Of $\frac{17}{13} = 1 + \frac{4}{13}$)

De 1 is wat we nodig hebben: de helen, die staan voor de komma.
De rest 4 gaat aanwijzen hoeveel tienden we gaan krijgen in de decimale breuk.
Er zijn dus over 4 ***helen*** ofwel 40 ***tienden***

40 = 3.13 + 1 (Of $\frac{40}{13} = 3 + \frac{1}{13}$)

Nu dus over 1 ***tienden*** ofwel 10 ***honderdsten*** etc. etc.

De resten zijn dus 4, 1, 10, 9, 12, 3, en dan weer 4 etc.

Wat valt op? A) Periodiciteit: want na de 4 begint het weer allemaal opnieuw
B) Er zijn 6 **verschillende** breuken met **dezelfde** resten, maar een andere volgorde.

Bij $\frac{2}{13}$ blijkt een andere **rest-reeks** te hebben.

Bij $\frac{1}{13}$: 1, 10, 9, 12, 3, 4

Bij $\frac{2}{13}$: 2, 7, 5, 11, 6, 8

Bij enkele resten in de rij bij $\frac{2}{13}$ kun je zien dat het dubbele van die bij $\frac{1}{13}$ zijn.
Maar hoe zit dat bij 10 en 7? Klopt het daar ook?

Daarvoor geldt: 10 * 2 = 20 = 7 (+ 13) Dus klopt ook op een veelvoud van 13 na.

Om bijvoorbeeld de resten van $\frac{6}{13}$ te vinden. Vermenigvuldigen de resten van $\frac{1}{13}$ met 6 maar zodra het meer dan 13 wordt halen we een veelvoud van 13 eraf.

Je ziet zo dat alle periodes even lang zijn.

Als 13 delers had, kreeg je geen mooie vermenigvuldigingstabel! Daarom: priem nemen!

Deze methode van rekenen met resten kun je (vast wel) in je GR programmeren.

Bijlage 3: lijst van priemgetallen

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59
61	76	71	73	79	83	89	97	101	103	107	109	113	127	131	137	139
149	151	157	163	167	173	179	181	191	193	197	199	211	223	227	229	233
239	241	251	257	263	269	271	277	281	283	307	311	313	317	331	337	347
349	353	359	367	373	379	383	389	397	401	409	419	421	431	433	439	443
449	457	461	463	467	479	487	491	499	503	509	521	523	541	547	557	563
569	571	577	587	593	599	601	607	613	617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719	727	733	739	743	751	757	761	769	773
787	797	809	811	821	823	827	829	839	853	857	859	863	877	881	883	887
907	911	919	929	937	941	947	953	967	971	977	983	991	997			

Bijlage 4: lijst van periodes (tussen de haakjes staat de periode)

				17 (16)	19 (18)	21 (6)	22 (2)	23 (22)
26 (6)	27 (3)	28 (6)	29 (28)	31 (15)	33 (2)	34 (16)	35 (6)	37 (3)
38 (18)	39 (6)	41 (5)	42 (6)	43 (21)	44 (2)	46 (22)	47 (46)	49 (42)
51 (16)	52 (6)	53 (13)	54 (3)	55 (2)	56 (6)	57 (18)	58 (28)	59 (58)
61 (60)	62 (15)	63 (6)	65 (6)	66 (2)	67 (33)	68 (16)	69 (22)	70 (6)
71 (35)	73 (8)	74 (3)	76 (18)	77 (6)	78 (6)	79 (13)	81 (9)	82 (5)
83 (41)	84 (6)	85 (16)	86 (21)	87 (28)	88 (2)	89 (44)	91 (6)	92 (22)
93 (15)	94 (46)	95 (18)	97 (96)	98 (42)	99 (2)	101 (4)	102 (16)	103 (34)
104 (6)	105 (6)	106 (13)	107 (53)	108 (3)	109 (108)	110 (2)	111 (3)	112 (6)
113 (112)	114 (18)	115 (22)	116 (28)	117 (6)	118 (58)	119 (48)	121 (22)	122 (60)
123 (5)	124 (15)	126 (6)	127 (42)	129 (21)	130 (6)	131 (130)	132 (2)	133 (18)
134 (33)	135 (3)	136 (16)	137 (8)	138 (22)	139 (46)	140 (6)	141 (46)	142 (35)
143 (6)	145 (28)	146 (8)	147 (42)	148 (3)	149 (148)	151 (75)	152 (18)	153 (16)
154 (6)	155 (15)	156 (6)	157 (78)	158 (13)	159 (13)	161 (66)	162 (9)	163 (81)
164 (5)	165 (2)	166 (41)	167 (166)	168 (6)	169 (78)			

Bijlage 5: Zelf een programmaatje schrijven bv. met Excel-sheet

Zelf een programmaatje schrijven. Bv.Periodiciteit bij breuken bijlage 5 - beta prog voor periode.xls