Universiteit Utrecht

Junior College Utrecht

Extreem

Keuzeopdracht voor wiskunde

Een herhalende opdracht over differentiëren.
Als je aan het einde tijd over hebt, is verrijking mogelijk over het trekken van raaklijnen aan cirkels en parabolen.

Waar gaat *Extreem* over?

Extreem koud, extreem warm, extreem veel, ..., extremisme. Bij extremen gaat het over uitersten. Over maxima en minima.

In de praktijk van het dagelijks leven kom je soms vragen tegen zoals: "wat zijn de afmetingen van een doos zodat ik zo weinig mogelijk karton nodig heb?" of "hoe ziet de dakgoot er uit die het meeste water kan afvoeren?"

Bij het vinden van maxima en minima (extremen of uiterste waarden) is de afgeleide functie een buiten gewoon krachtig hulpmiddel, zoals je in opgave 1 t/m 10 zult ervaren.

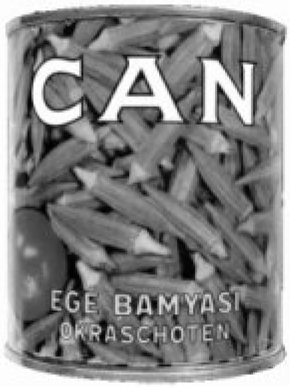
Werk in een groep van twee of drie. Zorg dat je in ieder geval aan opdracht 11 toekomt: als afronding van deze keuzeopdracht moet je je resultaten op de een of andere manier aan je docent en je klasgenoten presenteren. Je kunt bijvoorbeeld een poster maken met de uitwerking van een moeilijke som maken. Of een powerpoint presentatie over nieuw 'extreem' voorbeeld dat je zelf hebt bedacht.

Heb je tijd over, maak dan ook de opgaven 12 t/m 14 die veel creativiteit van je verwachten.

EXTREEM

1. Extreem

Bij het vinden van maxima en minima (extremen of uiterste waarden), zoals nodig is voor het beantwoorden van onderstaande vragen, is de afgeleide functie een buiten gewoon krachtig hulpmiddel.

		
Hoe kies je de afmetingen van een doos als je met zo weinig mogelijk karton een zo groot mogelijke inhoud wilt krijgen?	Wat zijn de diameter en hoogte van een literblik waarin het minste blik verwerkt is?	Een dakgoot van zink moet zo veel mogelijk water kunnen afvoeren? Hoe ziet die ideale dakgoot er uit?

2. De afgeleide

Uit de Wikipedia:
“In de wiskunde is de afgeleide een maat voor de verandering die een functie ondergaat als de argumenten van deze functie een *infinitesimaal kleine verandering* ondergaan. (Met een *infinitesimaal kleine verandering* wordt een verandering bedoeld die nagenoeg nul is.)
In een functie met één reële variabele wordt de afgeleide in een punt gegeven door de helling van de raaklijn aan de grafiek van deze functie in dat punt. Het woord afgeleide is hier in feite een afgekorte term voor het begrip afgeleide waarde. Het is een waarde die afgeleid is van de oorspronkelijke functie. Het bepalen van de afgeleide van een functie heet differentiëren.”

Op je eigen school:
Je hebt geleerd dat de afgeleide functie $f'(x)$, ook wel hellingsfunctie of kortweg afgeleide genoemd, laat zien hoe snel de functie $f(x)$ groeit ten opzichte van de variabele *x*. Voorbeeld: als $f(3) = 2$ en $f'(3) = 4$, dan heeft de grafiek in het punt (3,2) een helling gelijk aan 4. De helling van de raaklijn in punt (3,2) is ook 4. Als de *x* 0,01 groter wordt, zal de functie $f(x)$ (ongeveer) 0,04 groter worden.

a. Waarom staat dat woordje “ongeveer” in die zin?

b. In welke bijzondere situatie mag je dat woordje in die zin weglaten?

De afgeleide wordt berekend door te kijken wat er met de uitdrukking $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ gebeurt als $\Delta x \to 0$.
Op die manier is bewezen (of aannemelijk gemaakt) dat de afgeleide van $f(x)=a\cdot x^n$ gelijk is aan $f'(x)=a\cdot n\cdot x^{n-1}$.

In VWO5 leer je hoe je van functies de afgeleide functies kunt bepalen. Het bepalen van de afgeleide noemen we differentiëren. Handige hulpmiddelen zijn de kettingregel, productregel en quotiëntregel.

De afgeleide functie van $f(x)$ noteren we vaak als $f'(x)$. Soms zie je ook een andere notatie, bijvoorbeeld $\dfrac{dy}{dx}$ of $\dot{y}$ (y met een puntje er boven).

c. Maak een overzicht van de volgende begrippen en leg duidelijk wat die begrippen betekenen: afgeleide functie, afgeleide, differentiequotiënt, differentiaalquotiënt, functie, helling, hellingsgetal, kettingregel, raaklijn, richtingscoëfficiënt, vergelijking.
Bespreek je overzicht met een van de wiskundedocenten.

3. Opmerking

Je kunt controleren of je afgeleide (waarschijnlijk) goed is door in de GR (TI-83) bij y_1 de functie te zetten, bij y_2 de afgeleide die jij bepaald hebt en bij y_0 zet je neer $(y_1(x+0.001)-y_1(x))/0.001$. Als je de y_2 en y_0 met behulp van een tabel vergelijkt, zie je al gauw of je een fout gemaakt hebt.
De y_0 laat je altijd in de GR staan! Bij de Casio en andere GR's kan zoiets ook.

Opdracht: doe wat hier boven staat en controleer of alles werkt. Neem als voorbeeld $f(x)=x^2$.

4. Een vierkant is een bijzondere rechthoek.

Als je naar de omtrek en oppervlakte kijkt van alle rechthoeken, dan valt je op dat de verhouding oppervlakte – omtrek bij het vierkant het grootst is.

a. Wanneer is een vierhoek een rechthoek en wanneer is een vierhoek een vierkant?

b. Veronderstel dat de omtrek van een rechthoek 24 is. Maak het onderstaande lijstje af.

lengte	breedte	omtrek	oppervlakte
1	11	24	11
2	10	24	
3		24	
4		24	
5		24	
6		24	
7		24	
x	12 - x	24	

c. Maak een formule voor de oppervlakte voor het geval dat de lengte x is en toon met behulp van de afgeleide van de oppervlakteformule aan dat de oppervlakte maximaal is als $x=6$.

Bij de vorige opdracht vond je dat de oppervlakte maximaal is als deze rechthoek een vierkant van 6 bij 6 is. Geldt zo iets ook voor een rechthoek waarvan de omtrek 37,3 is? Kortom de vraag rijst op: geldt zoiets bij elke rechthoek waarvan de omtrek gegeven is? Kun je dat bewijzen?

d. Kies één van de mogelijkheden om het te bewijzen:
1. Neem een rechthoek met een omtrek gelijk aan $4p$ en bewijs dat de oppervlakte het grootst is bij de afmetingen p bij p.
2. Geef een sluitende redenering.

5. Een vierkant is een bijzondere rechthoek (vervolg)

Je kunt ook andersom werken. Je gaat uit van een vaste oppervlakte en je kijkt wanneer de omtrek minimaal is.

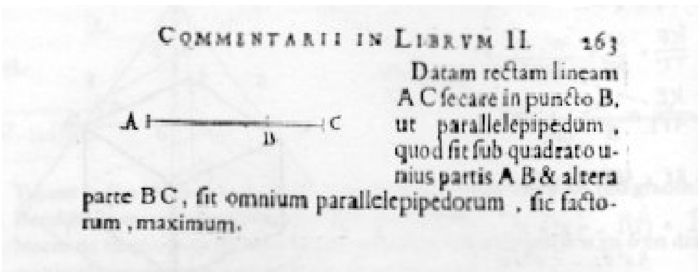
a. Veronderstel dat de omtrek van een rechthoek 144 is. Maak het onderstaande lijstje af.

lengte	breedte	omtrek	oppervlakte
1	144	290	144
2	72	146	144
3			144
4			144
x	$\frac{144}{x}$		144

b. Maak de opgave af net als bij opgave 4.

6. Een vraagstuk van Descartes

De filosoof en wiskundige René Descartes (1596-1650) schreef in *La Géométrie* (1637) het volgende:
Een gegeven lijnstuk *AC* zo in een punt *B* te delen dat de balk, die het vierkant met zijde *AB* als grondvlak heeft en *BC* als hoogte, het grootste is van alle zo geproduceerde balken.


COMMENTARII IN LIBRVM II. 263

Datam rectam lineam A C ſecare in puncto B, ut parallelepipedum, quod ſit ſub quadrato unius partis A B & altera parte BC, ſit omnium parallelepipedorum, ſic factorum, maximum.

a. Maak een schets van een balk met een vierkant (met zijde) *AB* als grondvlak en hoogte *BC*. Veronderstel dat $AC=1$

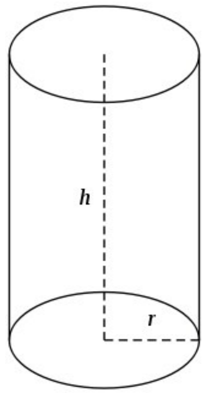
b. Los het vraagstuk op.

c. Geldt jouw antwoord ook als $AC \neq 1$?

7. Hoe ziet het ideale blik er uit?

Een blik met boontjes heeft een inhoud van 1 liter (=1000 ml). De fabrikant die de blikken maakt, wil met zo weinig mogelijk metaal een zo groot mogelijk blik maken. Dat noemt hij het ideale blik.
In deze opgave ga jij uitrekenen wat de afmetingen van het ideale blik zijn.

De cilinder die hier naast getekend is, heeft een hoogte *h,* en de straal van de grondcirkel is *r*. De inhoud van het blik is 1000 ml.



a. Als de hoogte 15 cm is, is de straal *r* ongeveer 4,6 cm.
Bereken de straal in 2 decimalen nauwkeurig.

b. De benodigde hoeveelheid blik in deze situatie is ongeveer 568 cm^2. Controleer dat getal met een berekening.

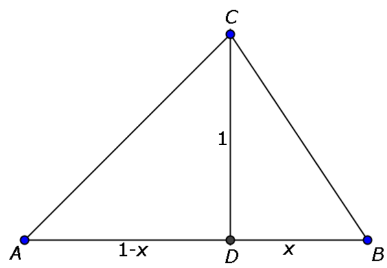
c. We noemen de benodigde hoeveelheid blik *H*.
Toon aan dat *H* berekend kan worden met:
$H = 2\pi \cdot r^2 + 2000 \cdot r^{-1}$
Met "toon aan" wordt in dit geval bedoeld: maak zelf een formule voor *H* en laat zien dat je dezelfde formule krijgt.

d. Bereken met behulp van de afgeleide van *H* voor welke *r* de benodigde hoeveelheid blik minimaal is.

e. Je hebt nu de straal van het ideale blik berekend.
Bereken ook de diameter en maak een schets van het vooraanzicht van het ideale blik. Wat valt je op. Cool hè?

8. De gelijkzijdige driehoek

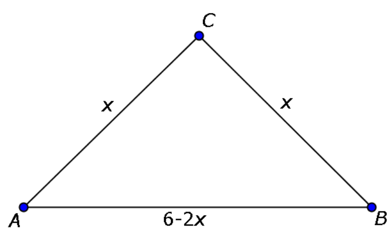
Dat de gelijkzijdige driehoek de grootste oppervlakte heeft bij een vaste omtrek is logisch toch? Maar kun je dat ook bewijzen?
Ja, en dat ga je in deze opgave doen.



Eerst moet je bewijzen dat van alle driehoeken met een gelijke basis en een gelijke hoogte de gelijkbenige driehoek de kleinste omtrek heeft.

a. Kies *AB*=1, de hoogte 1, *DB*=*x*
Maak een formule *P*(x) voor de omtrek, differentieer *P*(x) en laat zien dat *x*=½ een nulpunt is. Geef nu een redenering waarin je laat zien dat je bewezen hebt dat de gelijkbenige driehoek de grootste oppervlakte heeft.

Nu beperken we ons verder tot een gelijkbenige driehoek en laten zien dat de oppervlakte maximaal is als de driehoek gelijkzijdig is. We kiezen de omtrek gelijk aan 6. De zijden worden dan *x*, *x*, en 6-2*x*.

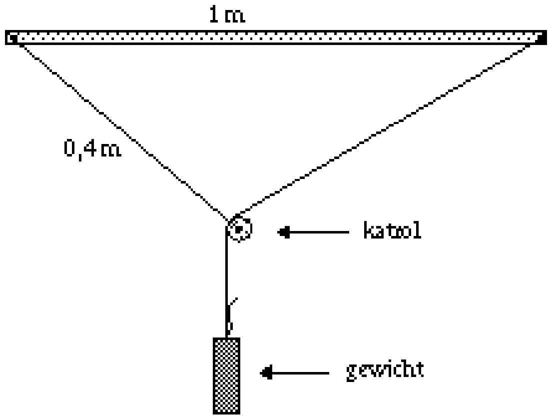


b. Maak een formule voor de oppervlakte m.b.v. de formule van Héron:
$Opp = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ waarin *s* de halve omtrek is. Maak het bewijs af.

9. Een gewichtig probleem (http://www.fi.uu.nl/toepassingen/02005/gewicht.html)

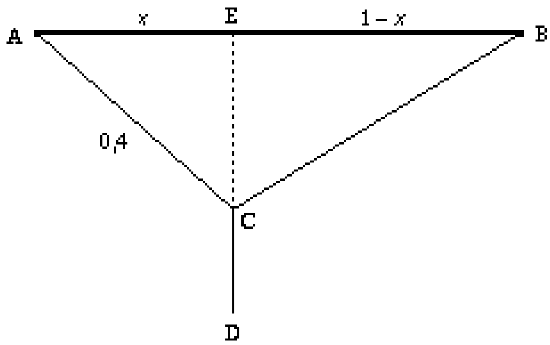
Markies de l'Hôpital (1661-1704) was een wiskundige die in 1696 het boek "Analyse des infiniment petits" publiceerde, dat als één van de eerste leerboeken in de analyse wordt beschouwd. De inhoud van dit boek is grotendeels niet door l'Hôpital zelf bedacht, maar door zijn leermeester Johann Bernoulli, die een veel groter wiskundige was. De (niet zo rijke) Bernoulli had met de kapitaalkrachtige edelman een contract afgesloten, dat l'Hôpital het recht gaf om alle wiskundige ontdekkingen van Bernoulli te publiceren. Zo leeft de naam van l'Hôpital dus nog steeds voort in de zogenaamde stelling van l'Hôpital, die bedacht is door Bernoulli.

De probleemstelling is als volgt.
Aan een horizontaal opgestelde meetlat van 1 meter zit aan de linkerkant een touwtje van 40 cm lang. Aan het einde van het touwtje is een katrol bevestigd. Een gewicht zit aan het touw van 1 meter dat via de katrol verbonden is met het rechter eindpunt van de meetlat.



De vraag is nu, welke positie de katrol en het gewicht zullen innemen als het geheel in evenwicht is.
Bij dit optimaliseringprobleem verwaarlozen we het gewicht van de katrol en de touwtjes ten opzichte van het gewicht van het blok. Uit de natuurkunde is bekend dat het blok de laagst mogelijk positie zal innemen.

In een schematische tekening is de opstelling als volgt:



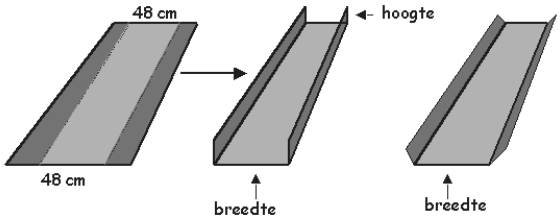
a. Kies AE=0,25 en laat door een berekening zien dat DE ongeveer 0,50 is.

b. Kies, net als l'Hôpital, AE=x.
Toon aan dat voor de lengte van DE geldt: $DE = 1 + \sqrt{0,16 - x^2} - \sqrt{1,16 - 2x}$

c. Met behulp van differentiëren, nulstellen en stevig doorwerken, krijg je deze vergelijking: $(x-1)(25 \cdot x^2 - 2 \cdot x - 2) = 0$.
Los de vergelijking op en controleer je resultaat.

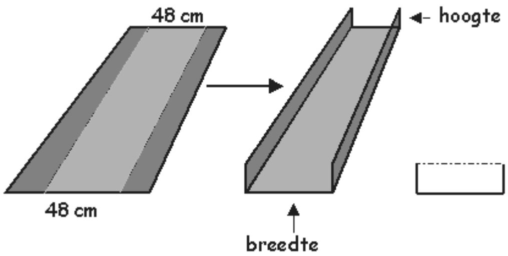
10. Hoe ziet de ideale dakgoot er uit?

Uit een lange reep zink, die 48 cm breed is, worden dakgoten gemaakt.
Een eenvoudige manier om een dakgoot te maken, is de zijwanden loodrecht omhoog te buigen (middelste figuur).
Als je niet om 90° wilt buigen, dan krijg je een ander type dakgoot (rechter figuur).
De onderzoeksvraag luidt:
Welke vorm moet de dakgoot hebben om het grootste aantal liters water per strekkende meter te kunnen bevatten



Het probleem van de maximale gootcapaciteit is een probleem met twee variabelen: de *breedte* van de goot en de *schuine hoek* waarover gebogen wordt. Door één van deze variabelen vast te kiezen, kun je met differentiëren toch op zoek gaan naar maximale waarden.

Als je de zijkanten over 90° buigt, dan wordt het vooraanzicht van de dakgoot een rechthoek.
De maximale capaciteit (= aantal liters water per strekkende meter) hangt natuurlijk af van de grootte van de oppervlakte van de rechthoek.

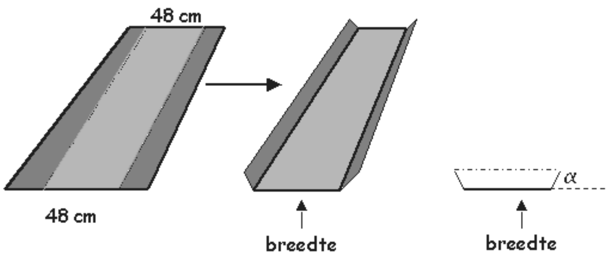


a. Stel dat de opstaande rand 10 cm hoog is. Laat zien dat de inhoud per strekkende meter 28 liter is.

Als de hoogte van de dakgoot verandert, zal de capaciteit van een strekkende meter goot mee veranderen.

b. Bij welke hoogte is die capaciteit maximaal?

Als de hoek van de zijkanten met de bodem verandert, verandert de oppervlakte van de doorsnede mee. Die doorsnede is dan een trapezium.
De oppervlakte van het trapezium hangt af van de lengte van het stuk dat omgebogen wordt en van de hoek α waar over omgebogen wordt.



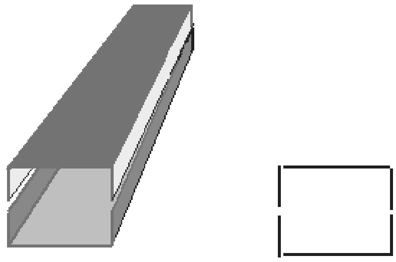
c. Bereken de oppervlakte van het trapezium als $\alpha = 50°$ en het omgebogen stuk 10 cm is. Rond je antwoord af op 1 cijfer achter de komma.

Kies $\alpha = 45°$. De oppervlakte van het trapezium hangt af van de lengte van het stuk dat omgebogen wordt.

d. Bereken de maximale oppervlakte van het trapezium als $\alpha = 45°$.

Je kunt voor α allerlei waarden nemen en bij elke α een geschikte breedte vinden. Dat schiet natuurlijk niet echt op. Gelukkig bestaat in de wiskunde een methode om maxima en minima te vinden bij functies van meer dan één variabele.

Een andere manier van oplossen.
Als je twee goten op elkaar zet zoals in het plaatje hiernaast, dan wordt het vooraanzicht een rechthoek.
Een vierkant is de rechthoek met de grootste oppervlakte bij een gegeven omtrek.
Een gevolg is dat een "half vierkant" de grootst mogelijke oppervlakte heeft van alle "halve rechthoeken".
Vandaar dat de goot met rechtopstaande zijkanten een maximale capaciteit heeft als de dwarsdoorsnede een half vierkant is. Dan is de hoogte 12 cm en de breedte 24 cm.



e. Probeer met een vergelijkbare redenering het antwoord te vinden op de vraag wat de ideale goot is als de zijkanten over een hoek α worden omgebogen.

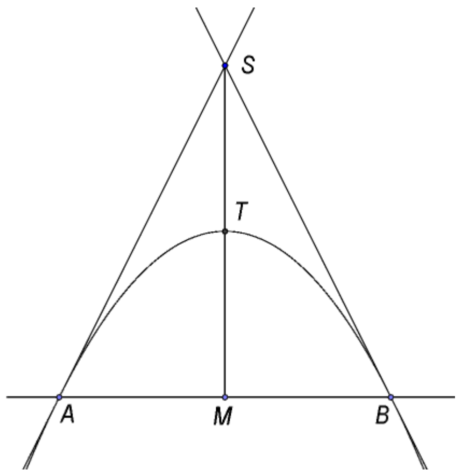
11. Afronding van Extreem!

Als afronding van deze keuzeopdracht wordt van jou/jullie een poster, een presentatie of een ander eindproduct verwacht.
Maak zelf een opgave waarin je aan je toeschouwers laat zien hoe krachtig het begrip afgeleide is. Natuurlijk werk je ook je eigen opgave uit. Bespreek je plan voor de afronding vooraf even met je wiskundedocent!

Als jet tijd over hebt: verrijking!

Als je lekker doorgewerkt hebt en nog wat tijd over is, staan op de volgende pagina’s nog wat aardige opgaven, 12 - 14.

Verrijking



12. Een aardige eigenschap van een parabool

Hiernaast is een parabool getekend. De middelloodlijn van *AB* is de symmetrieas van de parabool. De raaklijnen in *A* en *B* snijdt de symmetrieas in punt *S*. In dit plaatje lijkt het wel of *MT* even lang is als *TS*. Vragen die opkomen:

Zijn de lijnstukken *MT* en *TS* inderdaad even lang?
Geldt de eigenschap bij alle parabolen?

a. Teken de grafiek van $f(x) = -x(x-6)$ in je schrift (doe dat nauwkeurig).

b. Bereken de vergelijkingen van de raaklijnen in de nulpunten *A* en *B* van *f(x)*. Teken de raaklijnen en bereken de coördinaten van het snijpunt *S* van deze raaklijnen.

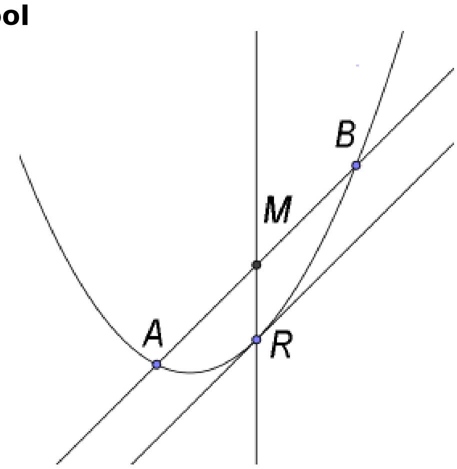
c. Onderzoek of punt *S* twee keer zo hoog ligt als de top van de parabool.

d. Bedenk een manier om deze eigenschap voor alle parabolen te bewijzen. Allereerst ga je deze eigenschap nauwkeurig formuleren. Zo'n formulering kan bijvoorbeeld zo beginnen: de raaklijnen in twee punten, die . . . enz. Er zijn twee manieren om zo iets te bewijzen:
1. Neem een willekeurige kwadratische functie, bijvoorbeeld $f(x) = (x-a)(x-b)+c$ of $f(x) = ax^2 + bx + c$ en bewijs de eigenschap. Kijk na afloop of je deze eigenschap wel voor *alle* parabolen hebt bewezen.
2. Bedenk hoe je elke willekeurige parabool kan laten ontstaan door transformaties uit het voorbeeld bij opdracht a en ga na hoe raaklijnen zich gedragen bij de diverse transformaties.

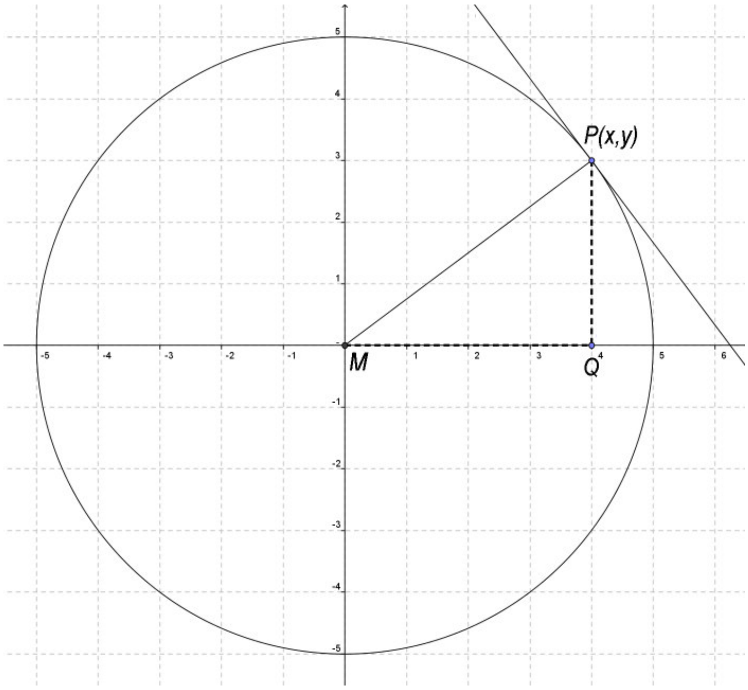
13. Nog een aardige eigenschap van een parabool

Voor het gemak zijn de *x*-as en *y*-as weggelaten. In punt *R* is de raaklijn getekend. *M* ligt recht boven punt en is het midden van *AB*. Met andere woorden: de *x*-coördinaat van *A* is evenveel kleiner dan de *x*-coördinaat van *R* als de *x*-coördinaat van punt *B* groter is dan de *x*-coördinaat van punt *R*.

Toon aan dat de lijn door *A* en *B* evenwijdig aan de raaklijn.



14. Cirkel met raaklijn



Hierboven is een cirkel getekend met straal 5 en de oorsprong als middelpunt.

a. Toon door berekening aan dat (4,3) en (0,5) op de cirkel liggen.

b. Nu kijken we naar een punt *P* op de cirkel met coördinaten *P(x,y).*
Leg uit dat de *y*-coördinaat van *P* gelijk is aan het lijnstuk *PQ*.

c. Leg ook uit dat voor elk punt P dat op de bovengenoemde cirkel ligt, geldt: $x^2 + y^2 = 25$. We noemen $x^2 + y^2 = 25$ de vergelijking van deze cirkel.

d. Wat is de vergelijking van een cirkel met straal *r* en met middelpunt (0,0)?

e. De vergelijking $x^2 + y^2 = 25$ kun je ook anders schrijven: $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$. De functie $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ beschrijft de bovenste helft van de cirkel. Bereken met behulp van de afgeleide van *f(x)* de vergelijking van de raaklijn in (4,3).

f. Controleer dat het product van de helling van de raaklijn met de helling de straal *MP* is gelijk aan -1.

g. Als het product van de hellingen van twee lijnen -1 is, staan de lijnen loodrecht op elkaar. Kun je dat verklaren of beredeneren?

h. Andersom geldt niet altijd. Kun je een uitzondering bedenken?

i. Maak de volgende formulering af:
Als twee lijnen loodrecht op elkaar staan dan is het product . . . of . . .