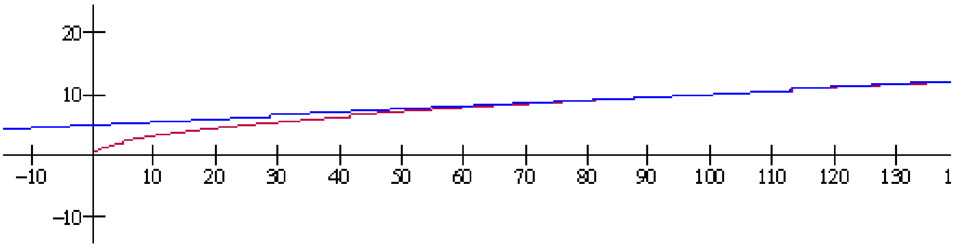
DE FORMULE VAN MACLAURIN

1. Inleiding: de wortel uit 102.

Als je nou eens geen rekenmachine had, hoe bereken je dan de wortel uit 102?

Met proberen kom je een heel eind. $\sqrt{102} > 10$ omdat $102 > 10^2$ en $\sqrt{102} < 11$ omdat $102 < 11^2$. Je kunt ook snel na rekenen dat $\sqrt{102} < 10,5$ omdat $102 < 10,5^2$ $(= 110,25)$.
Misschien kun je zo ook nagaan dat $\sqrt{102} < 10,2$. Met enig doorzettingsvermogen kun je zo een benadering vinden voor $\sqrt{102}$.

Er zijn ook slimmere methoden om zonder de rekenmachine de wortel uit een getal te vinden. In de eerste opdracht zullen we $\sqrt{102}$ benaderen met behulp van een "lineaire benadering".



2. De lineaire benadering

Hierboven is de grafiek getekend van $y = \sqrt{x}$. De grafiek is een halve parabool en begint in (0,0). Bovendien is de grafiek van de raaklijn in (100,10) getekend.
De vergelijking van deze raaklijn is: $y = \frac{1}{20}x + 5$.

a. Ga na dat die vergelijking goed is.

In de "buurt" van het punt (100,10) zie je vrijwel geen verschil meer tussen de raaklijn en de grafiek van $y = \sqrt{x}$. De conclusie ligt voor de hand: $\sqrt{102}$ kun je benaderen door naar de raaklijn te kijken en $x = 102$ in de raaklijnvergelijking in te vullen. Je vindt dan $\sqrt{102} \approx \frac{1}{20} x 102 + 5 \approx 10,1$

b. Kijk goed naar de ligging van de raaklijn en beredeneer of de benaderde waarde groter of kleiner is dan de exacte waarde van $\sqrt{102}$.

c. Controleer je antwoord van de vorige vraag met je rekenmachine en kijk hoeveel procent de benaderde waarde afwijkt van wat je rekenmachine als antwoord geeft.

3. Tweedegraads en n-degraads benaderingen

Het benaderen van grafieken in een punt met behulp van de raaklijn noemen we “lineaire benadering” of “eerstegraads benadering”. Je kunt een grafiek in een punt natuurlijk ook met een “tweedegraads benadering” benaderen. Dan ga je op zoek naar een parabool die in dat punt erg veel op de grafiek lijkt.

De formule van Maclaurin geeft een n-degraads benadering, waarbij n oneindig groot wordt.

Maar eerst ga je leren wat een reeks is.

4. Eindige en oneindige reeksen.

Een voorbeeld van een *eindige* reeks is: 1 + 4 + 9 + 16 + 25. Deze reeks schrijven we als volgt op: $\sum_{k=1}^{5} k^2$

a. Opdracht: bereken: $\sum_{k=1}^{10} k^2$

Een voorbeeld van een *oneindige* reeks is: 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + …

Met die drie puntjes bedoelen we “enzovoorts”. We noteren $\sum_{k=1}^{\infty} k^2$.

b. Opdracht: leg uit dat deze reeks oneindig groot wordt, dus $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 = \infty$

Er zijn ook voorbeelden van *oneindige* reeksen die niet oneindig groot worden.

Zo is $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \ldots = \frac{1}{2}$

Dat uit die reeks $\frac{1}{2}$ komt is niet zomaar in te zien. In de opdracht hieronder ga je zelf de uitkomst berekenen die hoort bij: $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots$

c. Opdracht: teken een vierkant van 1 dm bij 1 dm. Kleur de helft van het vierkant. Als je daarmee klaar bent, kleur je de helft van het overgebleven stuk. Daarna weer de helft van het overgebleven stuk, enz, enz.

Leg uit wat dit inkleuren te maken heeft met $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots$

Je denkt misschien dat het getal 1 nooit bereikt wordt. Dat klopt.
Maar omdat je net zo dicht bij dat getal 1 kan komen als je wilt, zeggen we toch dat $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1$.

Dat wordt je allemaal duidelijk gemaakt als je later in dit cursusjaar kennis maakt met het begrip “limiet”.

5. Reeksen met veeltermen

Je kunt ook reeksen maken met veeltermen. Zo'n reeks noemen we een machtreeks (de reeks bestaat uit machten van x).
Een voorbeeld van een *eindige* reeks met veeltermen:

$$\sum_{k=0}^{5} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$$

Afhankelijk van de keuze van *x* krijgt de reeks een andere waarde. De reeks is dus een functie van *x*. Duidelijk is dat deze reeks voor elke waarde van *x* *begrensd* is. Met *begrensd* bedoelen we dat we de som van de reeks echt uit kunnen rekenen. De som van de reeks wordt niet oneindig groot (of min oneindig).

a. Opdracht: hoe groot is $\sum_{k=0}^{5} x^k$ voor $x = 2$?

Een voorbeeld van een on*eindige* reeks met veeltermen: $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$

In een vorige opdracht heb je gezien, dat als $x = \frac{1}{2}$ dan is $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + 1 = 2$

Als $x \geq 1$ of als $x < -1$ dan is de reeks niet begrensd.

b. Opdracht: wat gebeurt er als $x = -1$? Wat is $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$?

6. De reeks $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$

a. Opdracht: schrijf zonder haakjes en zo kort mogelijk: $(1 + x + x^2 + x^3)(1 - x)$
En schrijf ook zonder haakjes en zo kort mogelijk: $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(1 - x)$

b. Opdracht: wat denk je dat er ontstaat als je $(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)(1 - x)$ uitwerkt?

Aangetoond kan worden dat $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ (mits $-1 < x < 1$)

c. Opdracht: waarom geldt $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ niet als $|x| \geq 1$?

d. Opdracht: met $x = 0$ is er ook iets geks aan de hand. Leg uit, wat precies?

7. Algemene machtreeks

Als een functie geschreven kan worden als een oneindige machtreeks dan geldt:

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k$$

8. Een bijzondere machtreeks: de formule van Maclaurin

De formule $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k$ moet waar zijn voor alle waarden van x, dus ook voor $x = 0$.

a. Opdracht: laat zien dat hier uit volgt dat $f(0) = \alpha_0$

b. Opdracht: differentieer de formule van $f(x)$ en laat zien dat geldt: $f'(0) = \alpha_1$

c. Opdracht: door nogmaals te differentiëren en $x = 0$ in te vullen, vind je een formule voor α_2. Doe dat!

En dat gaat zo verder, dus:

$$\alpha_0 = f(0)$$
$$\alpha_1 = f'(0)$$
$$\alpha_2 = \tfrac{1}{2} \cdot f''(0)$$
$$\alpha_3 = \tfrac{1}{2x3} f'''(0)$$
$$\alpha_4 = \tfrac{1}{2x3x4} f''''(0)$$
$$\alpha_k = \tfrac{1}{k!} f^{(k)}(0)$$

Conclusie: $f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \tfrac{1}{2} \cdot f''(0) \cdot x^2 + \tfrac{1}{2x3} \cdot f'''(0) \cdot x^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k$

Deze formule is genoemd naar Colin Maclaurin (1698-1746).

d. Opdracht: kijk eens in een encyclopedie wat over hem bekend is. Bijvoorbeeld: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/

9. De machtreeks sin(x)

a. Opdracht: vul de onderstaande tabel in

$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	$f''(x) = \ldots$	$f'''(x) = \ldots$	$f''''(x) = \ldots$	$f^{v}(x) = \ldots$
$f(0) =$	$f'(0) =$	$f''(0) =$	$f'''(0) =$	$f''''(0) =$	$f^{v}(0) =$

b. Opdracht: maak voor de sinus een machtreeks door de gevonden waarden uit de tabel in te vullen in de formule van Maclaurin.

Als je de opdracht goed hebt uitgevoerd, krijg je onderstaand resultaat.

$$\sin(x) = x - \tfrac{1}{3!} x^3 + \tfrac{1}{5!} x^5 - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

c. Opdracht: kijk eens goed waarom er $2k+1$ in de bovenstaande formule staat.

10. Rekenmachine

Jouw rekenmachine rekent met behulp van een reeks zo de waarde van bijvoorbeeld sin(2) uit.
Volgens deze formule is $\sin(2) \approx 2 - 8/6 + 32/120 - 128/5040 \approx 0{,}9079$
Je ziet dat na 4 termen de waarde van sin(2)=0,90929… al aardig bereikt is. Dat komt omdat die (2k+1)! in de noemer snel erg groot wordt en dus de volgende termen erg snel verwaarloosbaar klein worden.

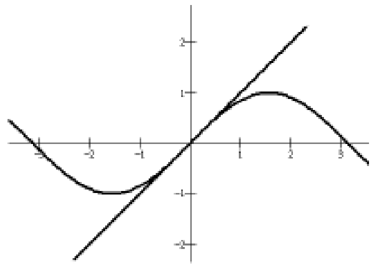
a. Opdracht: benader met behulp van de eerste 4 termen van de machtreeks van de sinus de waarde van $\sin(\frac{1}{2}\pi)$. Klopt je antwoord een beetje?

11. De machtreeks van cos(*x*)

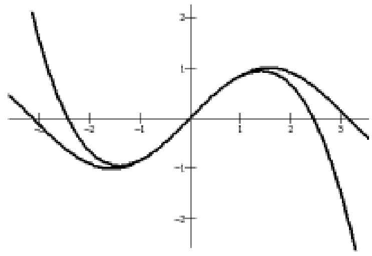
a. Opdracht: maak zelf een machtreeks voor de cosinus.

b. Opdracht: zoals je weet is de afgeleide van sin(*x*) de cos(*x*).
Controleer of jouw machtreeks van de cosinus goed is door de machtreeks van de sinus "term voor term" te differentiëren.

12. n-de graads benaderingen

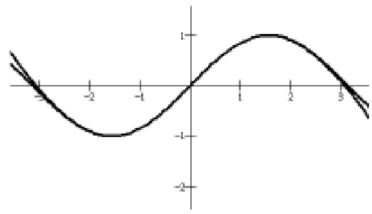


Een eerstegraads benadering van de $\sin(x) \approx x$. In de grafiek zie je dat de benadering alleen een aardige benadering is voor waarden van *x* "in de buurt van 0".
Volgens deze eerstegraadsbenadering is $\sin(0{,}12) \approx 0{,}12$
In werkelijkheid is $\sin(0{,}12) \approx 0{,}1197...$ Je ziet dat zo'n benadering aardig overeenkomt met de werkelijke waarde.



a. Hoeveel procent wijkt de eerstegraads benadering van $\sin(\frac{1}{6}\pi)$ af van de werkelijke waarde van $\sin(\frac{1}{6}\pi)$?

$\sin(x) \approx x - \frac{1}{3!}x^3$ is een derdegraads benadering. Je ziet dat de derdegraads grafiek een betere benadering is voor waarden van *x* "in de buurt van 0".



$\sin(x) \approx x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7$ is een zevendegraads benadering. Je ziet dat de grafiek al een beetje gaat lijken op een sinusoïde.

b. Opdracht: plot sin(*x*) in dezelfde figuur als de negendegraads benadering. Lijkt die grafiek al meer op de sin(*x*)?

c. Opdracht: welke tweedegraadsfunctie is voor *x* in de buurt van 0 een goede benadering voor cos(*x*)? Maak voor jezelf ook een plot om je antwoord te controleren.

13. De machtreeks van e^x

a. Opdracht: maak zelf een machtreeks voor e^x.

b. Opdracht: differentieer de machtreeks van de e^x "term voor term". Leuk hè?

AFRONDING

Presenteer de resultaten van je opdracht op een poster. Leg hierop zo duidelijk mogelijk uit wat je hebt gedaan.
Zet er ook een paar door jullie zelf bedachte reeksontwikkelingen op.
Bedenk wat je publiek volgens jullie (ten minste) geleerd moet hebben als ze kennis hebben genomen van jullie product. Bereid een vraag voor die een toeschouwer moet kunnen beantwoorden als hij/zij jullie product heeft bestudeerd.