LAAT JE (NIET) AFLEIDEN

Keuzeopdracht voor 6vwo (herhaling differentiëren)

1. Inleiding

Je hebt geleerd dat de afgeleide functie $f'(x)$, ook wel hellingsfunctie of kortweg afgeleide genoemd, laat zien hoe snel de functie $f(x)$ groeit ten opzichte van de variabele x. Voorbeeld: als $f(3)=2$ en $f'(3)=4$, dan heeft de grafiek in het punt (3,2) een helling gelijk aan 4. De helling van de raaklijn in punt (3,2) is ook 4. Als de x 0,01 groter wordt, zal de functie $f(x)$ (ongeveer) 0,04 groter worden.

a. Waarom staat dat woordje "ongeveer" in die zin?

b. In welke bijzondere situatie mag je dat woordje in die zin weglaten?

De afgeleide wordt berekend door te kijken wat er met de uitdrukking $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ gebeurt als $\Delta x \to 0$.

Op die manier is bewezen (of aannemelijk gemaakt) dat de afgeleide van $f(x)=a\cdot x^n$ gelijk is aan $f'(x)=a\cdot n\cdot x^{n-1}$.

Je hebt ook geleerd wat de afgeleiden zijn van de $\sin(x)$ en de $\cos(x)$.

Inmiddels weet je ook dat de afgeleide van e^x gelijk is aan e^x.

In VWO5 heb je geleerd hoe je van functies de afgeleide functies kunt bepalen. Het bepalen van de afgeleide noemen we differentiëren. Handige hulpmiddelen zijn de kettingregel, productregel en quotiëntregel.

De afgeleide functie van $f(x)$ noteren we vaak als $f'(x)$. Soms zie je ook een andere notatie, bijvoorbeeld $\dfrac{dy}{dx}$ of $\dot{y}$ (y met een puntje er boven).

c. Maak een overzicht van de begrippen en leg duidelijk wat die begrippen betekenen: afgeleide functie, afgeleide, differentiequotiënt, differentiaalquotiënt, functie, helling, hellingsgetal, kettingregel, productregel, quotiëntregel, raaklijn, richtingscoëfficiënt, vergelijking.
Bespreek je overzicht met een van de wiskundedocenten.

2. Differentiëren met de productregel; hogere afgeleiden van $f(x) = x\cdot e^x$

Opmerking: als je met e-machten werkt, dan is het handig om die e-macht buiten haakjes te zetten.

a. Laat zien dat de afgeleide van $f(x)$ te schrijven is als $f'(x)=(x+1)\cdot e^x$.

b. Bepaal ook de tweede afgeleide door $f'(x)$ nogmaals te differentiëren.

c. Maak een formule voor de n-de afgeleide, die we noteren als $f^{(n)}(x)$.

Opmerking: je kunt controleren of je afgeleide (waarschijnlijk) goed is door in de GR (TI-83) bij y_1 de functie te zetten, bij y_2 de afgeleide die jij bepaald hebt en bij y_0 zet je neer $(y_1(x+0.001)-y_1(x))/0.001$. Als je de y_2 en y_0 met behulp van een tabel vergelijkt, zie je al gauw als je een fout gemaakt hebt.
De y_0 laat je altijd in de GR staan! Bij de Casio kan zoiets ook.

3. Differentiëren met de productregel; hogere afgeleiden van $f(x) = x^2 \cdot e^x$

a. Bepaal de afgeleide van $f(x)$.

b. Bepaal ook de tweede afgeleide van $f(x)$.

c. Ik heb de vierde afgeleide van $f(x)$ bepaald en kreeg als antwoord: $f^{(4)}(x) = (x^2 + 8x + 12) \cdot e^x$. Controleer of ik dat goed gedaan heb.

d. Maak een formule voor de n-de afgeleide.

Opmerking: het gebruik van hogere afgeleiden kom je in de wiskunde regelmatig tegen, zoals bij Taylor- en Maclaurin reeksen.

4. Differentiëren met de quotiëntregel

Het gebruik van de quotiëntregel is eenvoudig. Je moet wel haakjes op de goede plek zetten en nauwkeurig werken. Hieronder staat een voorbeeld.

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{3x + 4} \rightarrow f'(x) = \frac{T' \cdot N - T \cdot N'}{(N)^2} = \frac{(2x + 2)(3x + 4) - (x^2 + 2x)(3)}{N^2} =$$

$$f'(x) = \frac{(6x^2 + 8x + 6x + 8) - (3x^2 + 6x)}{N^2} =$$

$$f'(x) = \frac{6x^2 + 8x + 6x + 8 - 3x^2 - 6x}{N^2} = \frac{3x^2 + 8x + 8}{(3x + 4)^2}$$

Opmerkingen:
1. Het is verstandig om eerst de quotiëntregel op te schrijven.
2. Je kan beter teveel haakjes gebruiken, dan te weinig.
3. De noemer wordt niet uitgewerkt.

a. Waarom is het niet verstandig de noemer uit te werken?

b. Bepaal de afgeleide van $f(x) = \dfrac{2x - 1}{3x + 4}$.

c Wanneer is een functie “monotoon dalend”?

d. Hoe zie je aan de $f'(x)$ dat de functie $f(x)$ “monotoon stijgend” is?

5. Nog een oefening met de quotiëntregel

De functie $f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 2}{x + 1}$ is ook te schrijven als $f(x) = 2x - 3 + \dfrac{1}{x + 1}$.

a. Laat zien dat klopt.

b. Differentieer beide uitdrukkingen en laat zien dat de uitkomsten gelijk zijn.

6. Een verzameling van toppen (1)

Om de coördinaten van de toppen van de grafiek van $f(x) = (x-1)^2 \cdot (x-4)$ te vinden, moet je de functie differentiëren en kijken voor welke waarde(n) van x de afgeleide nul is. Deze functie $f(x)$ kun je op verschillende manieren differentiëren. Je kunt met de productregel en kettingregel werken, maar je kunt er ook voor kiezen om eerst de haakjes weg te werken.

a. Bepaal de $f'(x)$ op twee manieren.

b. Toon aan dat de toppen van de grafiek op de lijnen $y = 0$ en $y = -4$ liggen.

De functie $f(x) = (x-1)^2 \cdot (x-4)$ in er eentje uit de familie van $f_p(x) = (x-p)^2 \cdot (x-p-3)$. De toppen van de grafieken van $f_p(x)$ liggen ook op de lijnen $y = 0$ en $y = -4$.

c. Toon dat door berekening aan.

d. Ook zonder een berekening kun je inzien dat de toppen van de grafieken van $f_p(x)$ liggen ook op de lijnen $y = 0$ en $y = -4$. Hoe kun je dat zien?

7. Een verzameling van toppen (2)

De functie $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x+1}$ heeft als afgeleide $f'(x) = \dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$

a. Controleer of dat goed is.

b. Bereken de coördinaten van de toppen van de grafiek en laat zien dat de ene top op de x-as ligt en de andere top op de lijn $y = \frac{8}{3}x$.

c. Toon aan dat de toppen van $f_p(x) = \dfrac{(x-p)^2}{x+p}$ voor $p \neq 0$ ook op de x-as en de lijn $y = \frac{8}{3}x$ liggen.

d. Waarom staat in de vorige opdracht $p \neq 0$? Wat gebeurt er als p wel nul is?

8. Scheve asymptoot

De grafiek van $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x+1}$ heeft een scheve asymptoot.

a. Bepaal de vergelijking van de scheve asymptoot.

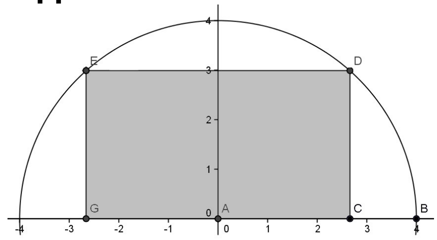
De grafieken van $f_p(x) = \dfrac{(x-p)^2}{x+p}$ met $p \neq 0$ hebben altijd een scheve asymptoot.

b. Voor welke p is de lijn $y = x + 12$ een scheve asymptoot?

c. Voor welke p gaat de scheve asymptoot door (2008 , 2010)?

9. Een toepassing met kettingregel (1); grootste oppervlakte

In deze opgave willen de afmetingen bepalen van de rechthoek met de grootste oppervlakte die nog net in een halve cirkel met straal 4 past.



a. De halve cirkel is de grafiek van de functie $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$. Leg uit hoe je die formule kunt vinden.

b. De coördinaten van punt D zijn $(x, \sqrt{16 - x^2})$
Maak een formule voor de oppervlakte.

c. Bereken met behulp van de afgeleide van de oppervlakteformule bij welke afmetingen de oppervlakte van de rechthoek maximaal is.

d. Probeer het antwoord te begrijpen door ook de onderste helft van de cirkel in het plaatje te tekenen.

10. Een toepassing met kettingregel (2); kortste afstand punt lijn

In deze opgave willen we de afstand berekenen van een punt tot een lijn *k*.
Voor het punt kiezen we de oorsprong *O*(0,0) en als lijn *k* nemen we $y = \frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$.

a. Maak op papier een plaatje.

b. Leg uit dat het punt *P* met coördinaten $(p, \frac{3}{4}p + \frac{25}{4})$ voor elke waarde van *p* op *k* ligt.

c. Maak een formule voor de afstand *d*(*O*,*P*) van *O* naar *P*.

d. Bepaal met behulp van de afgeleide van d(*O*,*P*) voor welke waarde van p de afstand *d*(*O*,*P*) minimaal is. Bereken ook de afstand *d*(*O*,*P*).

e. Als jouw rekenwerk goed is geweest, heb je als dichtstbijzijnde punt gevonden: *P*(-3,4) en *d*(*O*,*P*)= 5.

f. Maak een vergelijking voor de lijn *OP* en laat zien dat het product van de hellingsgetallen van de lijnen *k* en *OP* -1 is.

g. Onderzoek of product van de hellingsgetallen van twee lijnen die loodrecht op elkaar staan altijd -1 is. Geef een verklaring voor je antwoord.

h. Probeer eens met meetkundige methoden het dichtstbijzijnde punt op *k* te vinden.

11. Afronding

Maak zelf een opgave waarin je kunt laten zien hoe krachtig het begrip afgeleide is. Natuurlijk werk je ook je eigen opgave uit. Overleg eventueel met een van de wiskundedocenten.
Presenteer je opgave en de uitwerking ervan aan je medeleerlingen en je docenten, bijvoorbeeld op een poster of met een PowerPoint-presentatie.