DE LICHTSNELHEID IN WATER

Een *herhalings*opdracht over differentiëren van functies die je als *verrijking* een verrassende manier oplevert om de lichtsnelheid in water te meten

1. Inleiding

De snelheid van het licht in vacuüm is constant. Deze lichtsnelheid wordt aangeduid met de letter c en is precies 299 792 458 m/s. (Precies, omdat hiermee de meter gedefinieerd wordt.)

Deze uitspraak lijkt op een axioma, zoals je die in de wiskunde tegenkomt. Een voorbeeld van een axioma in de wiskunde is "door twee niet samenvallende punten, gaat precies één rechte lijn." In de wiskunde kunnen we deze uitspraak niet bewijzen, maar het lijkt zo logisch, dat we er van uit gaan dat de uitspraak overal geldt.

De uitspraak "de lichtsnelheid in vacuüm is constant" lijkt dus ook op een axioma. Natuurkundigen gaan er van uit dat die snelheid echt constant is. Metingen die gedaan zijn, geven steeds hetzelfde resultaat. Maar sceptici vragen zich af of de honderdste decimaal elke keer hetzelfde is en of de lichtsnelheid duizend jaar geleden of over duizend jaar ook even groot was.

a. Onderzoek in de literatuur en kijk eens op internet hoe "constant" de lichtsnelheid is. Formuleer je eigen standpunt over de uitspraak "de lichtsnelheid is constant".

2. De lichtsnelheid in een ander medium

De lichtsnelheid in lucht is lager dan de lichtsnelheid in vacuüm. In water is de snelheid van licht nog lager omdat de dichtheid van water groter is. De lichtheid in lood is nagenoeg nul.

a. Zoek uit hoe groot de lichtsnelheid is in diverse materialen.

3. Het principe van Fermat

Pierre Fermat (1601-1665) was een Franse jurist, die als hobby de wis- en natuurkunde beoefende. Fermat is vooral bekend geworden vanwege de "stelling van Fermat". Deze stelling zegt dat $x^n + y^n = z^n$ met positieve en gehele x, y, z en n alleen oplosbaar is voor $n<3$. Pas in 1994 bewees Andrew Wiles (Brits wiskundige) deze stelling. Er is ook een "kleine stelling van Fermat".

Fermat heeft ook een principe geformuleerd voor de optica.
Dit principe zegt: "*De weg die een lichtstraal tussen twee punten aflegt, is die welke in de kortste tijd afgelegd wordt*."

Uit dit principe volgt dat lichtstralen gebroken worden bij de overgang van het ene medium naar het andere, op de manier die in de natuurkunde met de brekingswet van Snellius wordt beschreven.

In deze opdracht gaan we kijken naar de breking van licht bij de overgang van lucht naar water. We maken geen gebruik van de brekingswet van Snellius, maar gebruiken rechtstreeks het principe van Fermat.

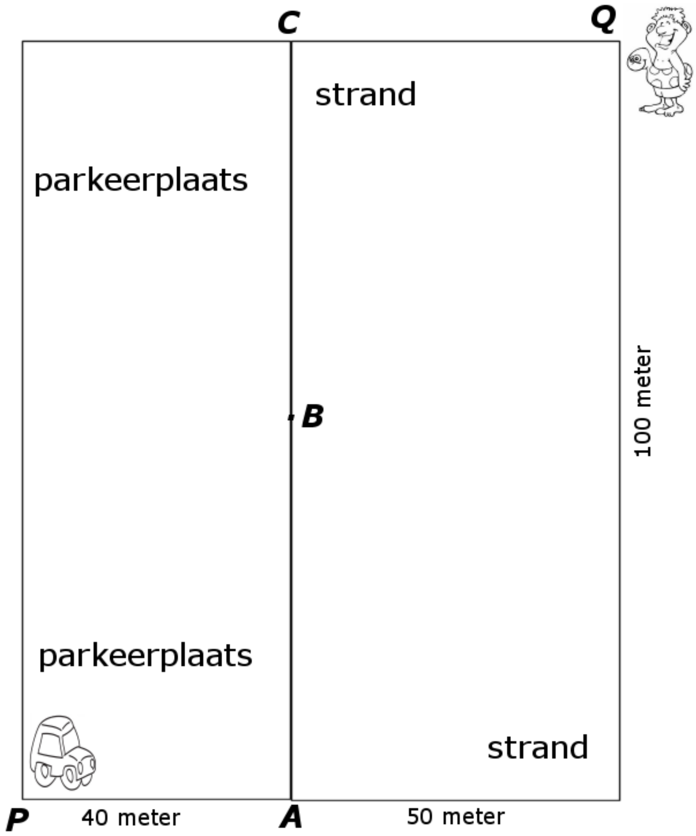
Eerst gaan we het principe van Fermat op een wandeling toepassen.

4. Een uitstapje naar het strand

Veronderstel eens een situatie zoals hiernaast getekend is. Je parkeert de auto op de parkeerplaats in punt *P* en je wilt gaan zwemmen in de zee bij punt *Q*. Het is nog erg vroeg, de parkeerplaats en strand zijn nagenoeg leeg.

De vraag die dan natuurlijk opkomt, is "hoe loop je het snelste van punt *P* naar punt *Q*?"

De tijd die nodig is om van *P* in *Q* te komen hangt af van de route die je kiest. En natuurlijk ook van de snelheid waarmee je over de parkeerplaats (= asfalt) loopt en die waarmee je over het strand (=rul zand) loopt.



Veronderstel verder dat je loopsnelheid op de parkeerplaats 1,2 m/s is en de loopsnelheid door het rulle zand 0,8 m/s is.

a. Hoe lang duurt de wandeling van *P* naar *Q* als de wandeling via punt *A* gaat?

b. Hoe lang duurt de wandeling als de wandeling via punt *C* gaat?

c. Punt *B* ligt halverwege *AC*. Hoe lang duurt de wandeling als de wandeling via punt *B* gaat?

d. Waarschijnlijk kan de wandeling nog sneller. Zoek eens uit of de wandeling sneller kan, als je punt *B* over de lijn *AC* verplaatst.

5. Een formule maken

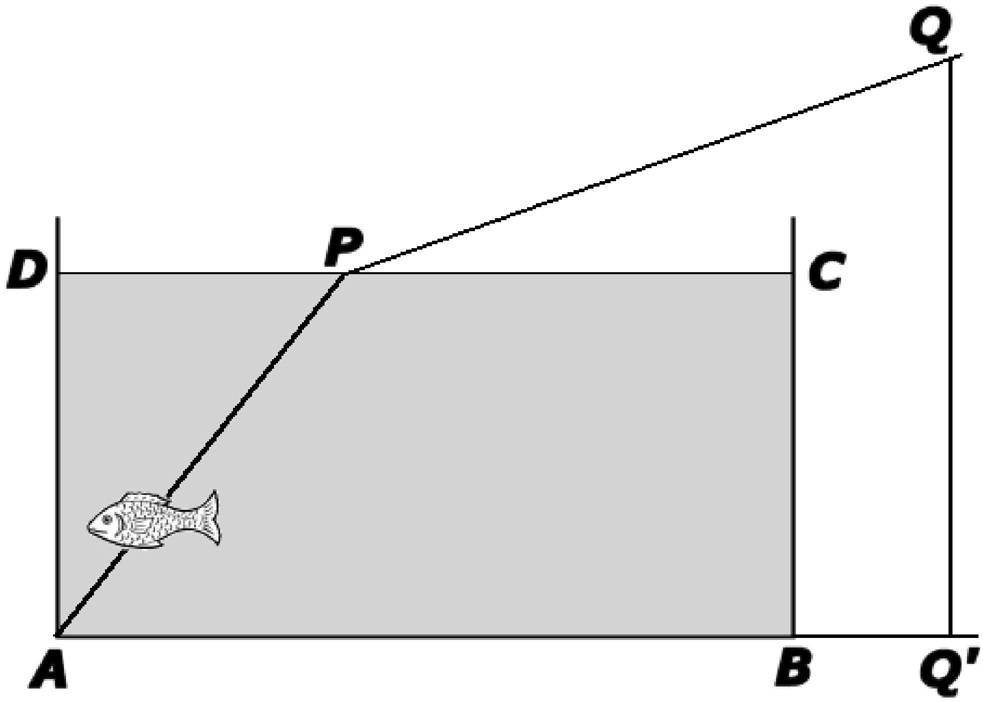
a. De afstand van *A* naar *B* noemen we *x*. Maak een formule (= functie) waarin je de totale tijd *T* die de wandeling van *P* via *B* naar *Q* kost, uitdrukt in *x*. Controleer je formule met de antwoorden die je gevonden hebt in de vorige opgave.

b. Laat zien dat de afgeleide van *T(x)* gelijk is aan:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{1}{1{,}2} \cdot \frac{x}{\sqrt{1600 + x^2}} + \frac{1}{0{,}8} \cdot \frac{-100 + x}{\sqrt{12500 - 200x + x^2}}$$

c. Bereken met behulp van de afgeleide van *T(x)* en je rekenmachine hoelang de snelste wandeling duurt en waar dan punt *B* moet liggen.

6. Breking van licht



Bij de breking van het licht op de grens van water en lucht gebeurt iets vergelijkbaars als bij de wandeling in de vorige opgaven. Het licht neemt de snelste weg om van punt *A* naar punt *Q* te komen.

Veronderstel dat de rechthoek *ABCD* een niet te klein aquarium is. Zet wat realistische afmetingen bij de lijnstukken *AB*, *BC*, *BQ'* en *QQ'*. Kies ook een waarde voor *DP*.

a. Hoeveel tijd heeft het licht nodig om van *A*, via *P* naar *Q* te gaan?
Doe in deze opdracht alsof de lichtsnelheid in lucht 300000 km/s is (klopt redelijk) en de lichtsnelheid in water 200000 km/s is (klopt niets van).
Werk erg nauwkeurig en gebruik flink wat decimalen.

b. Kies een andere waarde voor *DP* en bereken opnieuw hoeveel tijd het licht nodig heeft. Vind je een verschil met onderdeel a?

7. Weer een formule

a. Maak een formule voor de tijd *T* die nodig is om van *A*, via *P* naar Q te gaan. Noem *DP* in deze formule *x*, de lichtsnelheid in lucht c_l en de snelheid van het licht in water c_w.

b. Controleer jouw formule voor de waarden van *DP* die in de vorige opgave gebruikt hebt.

c. Bepaal de afgeleide van de *T.*
Kijk die formule nauwkeurig na. Heb je gebruik gemaakt van de kettingregel?

8. Waarom een experiment

De formule die de geldt voor een wandeling (een vorige opgave) ziet er ongeveer zo uit:

$T = \frac{1}{v_p} \cdot \sqrt{...+x^2} + \frac{1}{v_s} \cdot \sqrt{...-...\cdot x + x^2}$

de afgeleide van T ziet er ongeveer zo uit:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{1}{v_p} \cdot \frac{x}{\sqrt{...+x^2}} + \frac{1}{v_s} \cdot \frac{...+x}{\sqrt{...-...\cdot x + x^2}}$$

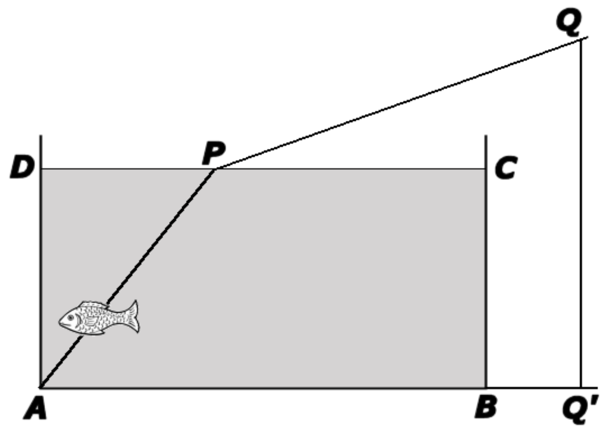
Als de wandeling het snelst is, dan geldt: $\frac{dT}{dx} = 0$. Er ontstaat dan een vergelijking met 3 "onbekenden": v_p, v_s en x. Als je twee "variabelen" kent, dan kun je de waarde van de derde "variabele" uit rekenen.
Bij de wandeling kende je de twee snelheden, dus kon je de x uitrekenen.

Bij het aquarium kennen we de lichtsnelheid in lucht, vrijwel gelijk aan de lichtsnelheid in vacuüm. En we kunnen in een experiment de plaats van punt P bepalen. Met die twee gegevens kunnen we de waarde van de snelheid in het water berekenen.

a. Leg aan elkaar uit wat hier boven staat. Controleer bij elkaar of je het allebei goed begrijpt.

9. Het experiment

Maak een experimentele opstelling als in het plaatje hiernaast. Noteer alle afmetingen.



Punt Q stelt je oog voor, en punt A een goed zichtbaar, blinkend voorwerp op de bodem van het aquarium.

Hoe bepaal je nu de afstand DP?

Je kunt proberen je medeleerling punt P te laten aflezen, bijvoorbeeld door een dunne lat over de bovenkant van de waterbak van punt C naar punt D te verschuiven.

Een andere manier: waar *lijkt* het voorwerp uit punt A zich te bevinden? Geef dat punt aan in de figuur. Kun je dat gebruiken om DP te meten?

Herhaal het experiment een aantal keren.

10. De slotberekening

Met behulp van alle gegevens die je nu hebt, maak je een formule voor T. Die formule ga je weer differentiëren. De afgeleide ga je nul stellen en je gaat de waarde van de lichtsnelheid in lucht en de gemeten waarde van DP invullen. Uit de vergelijking die dan ontstaat, kun je de lichtsnelheid in water uit rekenen.

11. Klopt jouw waarde?

Controleer of de door jullie gevonden waarde overeenkomt met de bekende waarde.
Als die waarde erg afwijkt, kun je daar een verklaring voor vonden?
In dat geval, hoe zou je het experiment kunnen verbeteren?

12. Achtergronden

Op internet is veel te vinden over het bepalen van de lichtsnelheid. Het is voor jullie interessant materiaal.

AFRONDING

Bedenk wat je over deze opdracht aan je docent en je medeleerlingen wilt presenteren. Welke vorm (poster, PowerPoint, demo van een model, …) past daar het beste bij?
Bedenk een vraag die een medeleerling moet kunnen beantwoorden als hij/zij jullie product heeft bekeken.

---einde---